Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-13

Nombre y apellidos.....

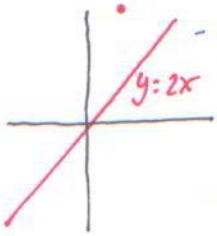
1_1.- Encuentra todas las soluciones del sistema $\begin{cases} tx' = 2x - y \\ ty' = 2x - y \end{cases}$ $\Rightarrow x' = y'$. $t \neq 0$

Por el teorema del valor medio $y = x + k$, k constante.
Si x es solución y $y_1 = x + k_1$, $y_2 = x + k_2$ son soluciones
entonces $t y_1' = 2x - y_1 = x - k_1$ como $y_1' = y_2'$ $\Rightarrow \boxed{k_1 = k_2}$
$t y_2 = 2x - y_2 = x - k_2$

Luego cualquier solución x de la ecuación vectorial que
$\boxed{tx' = x - k}$ es lineal de 1º orden cuya solución
es $\begin{cases} x = t \\ x \equiv k \end{cases}$ solución de la homogénea, $\begin{cases} \text{Así } x(t) = k_1 t + k \\ y(t) = k_1 t + 2k \end{cases}$ $k_1, k \in \mathbb{R}$
" particular

Solución general del sistema. Esta solución existe $\forall \mathbb{R}$, excluyo
$t = 0$. Si $t = 0$ $0 = 2x - y$ así $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x \equiv x_0 \\ y \equiv 2x_0 \end{cases}$
soluciones constantes. todas sobre la recta $y = 2x$

1_2.- Prueba que si las condiciones iniciales son fijadas para $t_0 \neq 0$, entonces la solución existe y es única sobre la recta real. Si $t_0 = 0$, la solución existe solo si $2x_0 - y_0 = 0$. Comprueba que en este último caso no hay unicidad.



- Si $t_0 \neq 0$ la solución $\begin{cases} tx' = 2x - y \\ ty' = 2x - y \\ x(t_0) = x_0 \quad y(t_0) = y_0 \end{cases}$ la solución está dada por $\begin{cases} x(t) = k_1 t + k \\ y(t) = k_1 t + 2k \end{cases}$ (1)
y $x_0 = k_1 t_0 + k$, $y_0 = k_1 t_0 + 2k$, $\begin{vmatrix} t_0 & 1 \\ t_0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$
tiene solución única.

- Si $t_0 = 0$ entonces $\begin{cases} (2) \begin{cases} x = x_0 \\ y = 2x_0 \end{cases} \text{ es solución} \\ \text{pero también (1)} \\ \text{para } x(1) = x_0 \quad y(1) = 2x_0 \end{cases}$ no es única sobre la recta $y = 2x$

1_3.- Prueba que el determinante de cada par de soluciones linealmente independientes es igual a Ct donde C es una constante distinta de cero.

Las soluciones constantes están todas sobre la recta $y = 2x$ y no son independientes. Sean $\Phi_1(t) = (k_1 t + k_2,\ k_1 t + 2k_2)$ y $\Phi_2(t) = (s_1 t + s_2,\ s_1 t + 2s_2)$
dos soluciones independientes, entonces

$$|\Phi_2(t)| = \begin{vmatrix} k_1 t + k_2 & k_1 t + 2k_2 \\ s_1 t + s_2 & s_1 t + 2s_2 \end{vmatrix} = \cancel{k_1 s_1 t^2} + k_2 s_1 t + 2k_1 s_2 t + \cancel{2k_2 s_2} - \cancel{k_1 s_1 t^2} - k_1 s_2 t - 2s_1 k_2 t - \cancel{2k_2 s_2} =$$

$= t(k_1 s_2 - s_1 k_2) = t \begin{vmatrix} k_1 & s_1 \\ k_2 & s_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ya que si $\begin{vmatrix} k_1 & s_1 \\ k_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0$ las soluciones no son independientes. Este determinante solo se anula para $t = 0$

1_4.- ¿Es la afirmación anterior contradictoria a la caracterización de la independencia funcional a través del determinante? (**Recordemos** que si $\phi(t)$ es una matriz fundamental, entonces $|\phi(t)| \neq 0$ para todo t?

No, ya que nuestro sistema $x' = \frac{2}{t} x - \frac{1}{t} y$
$y' = \frac{2}{t} x - \frac{1}{t} y$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2/t & -1/t \\ 2/t & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tiene una matriz $A(t) = \begin{pmatrix} 2/t & -1/t \\ 2/t & -1/t \end{pmatrix}$
que **NO ES CONTINUA** si $t = 0$. Para todo $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \notin (\alpha, \beta)$
tenemos que $|\Phi_1 \Phi_2(t)| \neq 0$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$.

2.- Se considera una matriz de funciones $\phi(t) = (\phi_{i,j}(t))_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ de i filas y j columnas de modo que cada $\phi_{i,j}$ es una función derivable. Prueba que

$$|\phi(t)|' = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \phi_{1,1}(t) & \cdots & \phi_{1,n}(t) \\ \vdots & & \\ \phi'_{i,1}(t) & \cdots & \phi'_{i,n}(t) \\ \vdots & & \\ \phi_{n,1}(t) & \cdots & \phi_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

VEAMOS LA PRUEBA POR INDUCCIÓN.

SI $n=2$ $\quad |\Phi(t)|' = (\Phi_{11}(t)\Phi_{22}(t) - \Phi_{12}(t)\Phi_{21}(t))' =$

$= \Phi'_{11}(t)\Phi_{22}(t) + \Phi_{11}(t)\Phi'_{22}(t) - \Phi'_{12}(t)\Phi_{21}(t) - \Phi_{12}(t)\Phi'_{21}(t) =$

$= (\Phi'_{11}(t)\Phi_{22}(t) - \Phi'_{12}(t)\Phi_{21}(t)) + (\Phi_{11}(t)\Phi'_{22}(t) - \Phi_{12}(t)\Phi'_{21}(t))$

$= \begin{vmatrix} \Phi'_{11} & \Phi'_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi'_{21} & \Phi'_{22} \end{vmatrix}$

— · —

SEA $\Phi = (\Phi_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ $\qquad |\Phi(t)|' = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\Phi_{1j} A_{1j}\right)'$

DESARROLLO POR LA 1ª FILA

DONDE $A_{1j} = \begin{vmatrix} \Phi_{21} & \Phi_{2j-1} & \Phi_{2j+1} & \Phi_{2n} \\ & & & \\ \Phi_{n1} & \Phi_{nj-1} & \Phi_{nj+1} & \Phi_{nn} \end{vmatrix}$ MATRIZ MENOR DE $(n-1)\times(n-1)$.

$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\left(\Phi'_{1j}|A_{1j}| + \Phi_{1j}|A_{ij}|'\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\Phi'_{1j}|A_{1j}| +$

$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\Phi_{1j}|A_{1j}|' = \begin{vmatrix} \Phi'_{11} & \cdots & \Phi'_{1n} \\ \Phi_{21} & & \Phi_{2n} \\ \Phi_{n1} & & \Phi_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\Phi_{1j}|A_{1j}|' =$

HIPÓTESIS INDUCCIÓN

$\begin{vmatrix} \Phi'_{11} & \Phi'_{1n} \\ \Phi_{n1} & \Phi_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\Phi_{1j} \sum_{k=1}^{n-1} \begin{vmatrix} \Phi_{21} & \Phi_{2,j-1} & \Phi_{2n} \\ \Phi'_{k1} & & \Phi'_{kn} \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n,j-1} & \Phi_{nn} \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} \Phi'_{11} & \Phi'_{1n} \\ \Phi_{n1} & \Phi_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\Phi_{1j} \begin{vmatrix} \Phi_{21} & \Phi_{2,j-1} & \Phi_{2n} \\ \Phi'_{k1} & & \Phi'_{kn} \\ \Phi_{n1} & & \Phi_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{1n} \\ \Phi'_{i1} & \Phi'_{in} \\ \Phi_{n1} & \Phi_{nn} \end{vmatrix}.$

C.Q.D.