Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-15

Nombre y apellidos.....

1.- Encuentra la solución del problema $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y + z + 3 \\ z' = x - 2 \end{cases}$, con las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$ y $z(0) = 3$.

PROBLEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y + z \\ z' = x \end{cases}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

AUTOVALORES DE A: $0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 + 2 =$

$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$. VEMOS QUE $\lambda = 2$ ES UN AUTOVALOR Y ASÍ $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$

CÁLCULO DE AUTOVECTORES:

PARA $\lambda = 2$ TENEMOS EL SISTEMA

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 0 \\ -y + z &= 0 \qquad z = y \end{aligned}$$

SI $y = 1 \Rightarrow x = 2$, $z = 1$

PARA EL AUTOVALOR $\lambda = 2$ TENEMOS $v_1 = (2, 1, 1)$ AUTOVECTOR

PARA $\lambda = i$ TENEMOS EL SISTEMA

$$\begin{aligned} (1-i)x + 2y &= 0 \\ (1-i)y + z &= 0 \qquad \text{SI } z = -2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{1-i} = \dfrac{2+2i}{2} = (1+i) \\ \text{Y } (1-i)x = -2(1+i) \Rightarrow x = \dfrac{-2(1+i)}{1-i} = \dfrac{-\cancel{2}(1+i)^2}{\cancel{2}} = -2i \end{cases}$

PARA EL AUTOVALOR $\lambda = i$ TENEMOS $w_1 = (-2i, (1+i), -2)$ AUTOVECTOR

POR TEORÍA DE ALGEBRA LINEAL SABEMOS QUE $\lambda = -i$ ES UN AUTOVALOR CON $\bar{w}_1 = (2i, 1-i, -2)$ AUTOVECTOR

MATRIZ DE JORDAN LA MATRIZ A ES DIAGONALIZABLE CON MATRIZ DE JORDAN $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ Y CON MATRIZ DE JORDAN REAL $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ PARA UNA MATRIZ DE PASO

MATRIZ DE PASO: $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\uparrow v_1 \quad \downarrow \mathrm{Re}\, w_1 \quad \downarrow \mathrm{Im}\, w_1$

MATRIZ EXPONENCIAL $e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} t} = \left(\begin{array}{c|cc} e^{2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{array}\right)$

Por tanto $e^{At} P = P e^{Jt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|cc} e^{2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{array}\right) =$

$= \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 2\operatorname{sen} t & -2\cos t \\ e^{2t} & \cos t - \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t + \cos t \\ e^{2t} & -2\cos t & -2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ Esta es una matriz fundamental del problema homogéneo

La solución general del problema homogéneo es

$\phi(t) = e^{At} P \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{PROBLEMA NO HOMOGÉNEO}}$ Podríamos usar el método de variación de las constantes, pero como $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ es constante, probaremos una solución constante

$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ y + z &= -3 \\ x &= 2 \end{aligned}$ Así $x = 2$ $y = -1$ y $z = -2$ es una solución constante.

La solución general del problema es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 2\operatorname{sen} t & -2\cos t \\ e^{2t} & \cos t - \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t + \cos t \\ e^{2t} & -2\cos t & -2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 2c_1 - 2c_3 &= -2 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ c_1 - 2c_2 &= 5 \end{aligned} \iff$

$c_1 = -1 + c_3$

$c_2 = \frac{c_1 - 5}{2}$

$c_1 + \frac{c_1 - 5}{2} + c_1 \cancel{+1} = \cancel{1} \Rightarrow 5/2\, c_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow c_1 = 1,\ c_3 = 2$ y $c_2 = -2$.

Luego la solución buscada es $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (2e^{2t} - 4\operatorname{sen} t - 4\cos t) \\ -1 + (e^{2t} + 4\operatorname{sen} t) \\ -2 + (e^{2t} + 4\cos t - 4\operatorname{sen} t) \end{pmatrix}$