Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-1

Nombre y apellidos.....

1.- Resuelve la ecuación: $\ln(y+1) = y^2+1$

CONSIDERAMOS LA FUNCIÓN $f(y) = \ln(y+1) - y^2 - 1$.

$\text{Dom } f = \{ y \in \mathbb{R} : y > -1 \}$

$\lim_{y \to -1^-} f(y) = -\infty$

$\lim_{y \to \infty} f(y) = -\infty$

$f'(y) = \frac{1}{y+1} - 2y \quad \begin{cases} >0 & \text{si } y \in (-1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}) \\ =0 & \text{si } y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ <0 & \text{si } y > \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ MÁXIMO

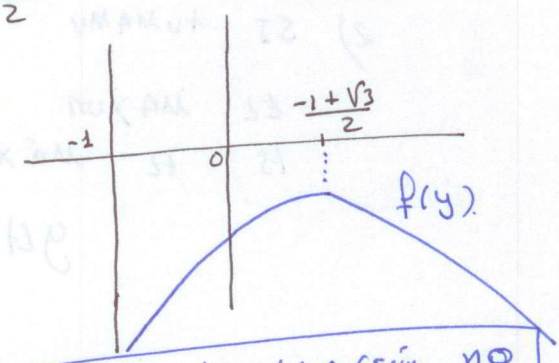
$\frac{1}{y+1} - 2y = 0 \iff \frac{1}{y+1} = 2y$

$\iff 1 = (y+1)2y = 2y^2 + 2y$

$\iff 2y^2 + 2y - 1 = 0$

$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 < 0$



POR TANTO LA ECUACIÓN NO TIENE SOLUCIÓN

2.- Resuelve la E.D.O. : $x(t) = (x'(t))^2$.

SI $x(t) = (x'(t))^2 \Rightarrow x(t) \geq 0$.

ASÍ PODEMOS ESCRIBIR $x'(t) = \pm\sqrt{x(t)}$ Y TAMBIÉN

O BIEN $x'(t) = \sqrt{x(t)} \iff \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1$ INTEGRANDO EN t

$\int \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}}\,dt = \int 1\,dt \iff 2\sqrt{x(t)} = t + k$ Y ASÍ $x(t) = \left(\frac{t+k}{2}\right)^2$ PARA $k \in \mathbb{R}$

O BIEN $x'(t) = -\sqrt{x(t)} \iff \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = -1$ INTEGRANDO EN t

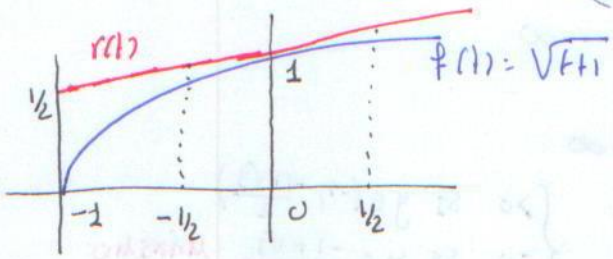
$\int \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}}\,dt = \int -1\,dt \iff 2\sqrt{x(t)} = -t + k$ Y ASÍ $x(t) = \left(\frac{k-t}{2}\right)^2$ PARA $k \in \mathbb{R}$

TENEMOS DOS E.D.O CADA UNA DE ELLAS CON UNA FAMILIA DE CURVAS SOLUCIÓN.

3.- Dada la función $f(t) = \sqrt{t+1}$
1) calcula la recta $r(t)$ tangente a la gráfica de f por el punto $(0, f(0))$;
2) calcula el error máximo que se puede cometer al tomar $r(t)$ en lugar de $f(t)$ en el intervalo $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

1) $f(t) = \sqrt{t+1}$; $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}$ $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

LUEGO $r(t) = \dfrac{1}{2}t + 1$ $\left(\boxed{r(t) = f'(0)(t-0) + f(0)} \right)$



2) SI TOMAMOS $r(t)$ EN LUGAR DE $f(t)$ PARA $t \in [-1/2, 1/2]$ EL MAYOR ERROR POSIBLE QUE PODEMOS COMETER ES EL MÁXIMO DE LA FUNCIÓN

$$g(t) = |f(t) - r(t)| = r(t) - f(t) =$$

$$= \frac{1}{2}t + 1 - \sqrt{t+1} \geq 0 \quad \left(\text{FUNCIÓN CONTINUA Y POSITIVA PARA } t > -1 \right)$$

PODEMOS g

$$g'(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \begin{cases} < 0 & \text{SI } t \in (-1, 0) \\ > 0 & \text{SI } t \in (0, \infty) \end{cases}$$

(EN $t = 0$ g TIENE UN MÍNIMO, $g(0) = 0$)

LUEGO EL MÁXIMO DE g EN $[-1/2, 1/2]$ SE ENCUENTRA EN LOS EXTREMOS $t = -1/2$. $t = 1/2$

$$g(-1/2) = -\frac{1}{4} + 1 - \sqrt{1/2}$$

ó

$$g(1/2) = \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3/2}$$

¿ $-\frac{1}{4} - \sqrt{1/2} + \cancel{1} \leq \cancel{1} + \frac{1}{4} - \sqrt{3/2}$?

$\Leftrightarrow -1/2 \leq \sqrt{1/2} - \sqrt{3/2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3/2} - \sqrt{1/2} \leq 1/2$

$\Leftrightarrow 3/2 - 2\sqrt{3/2}\sqrt{1/2} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leq 2\sqrt{3/2}\sqrt{1/2}$ ASÍ $\frac{7}{4} \leq 2\sqrt{\frac{3}{4}}$ y $\frac{49}{64} \leq \frac{3}{4}$ ¡FALSO!

COMO $g(-1/2) \geq g(1/2)$, VEAMOS PODEMOS, EL POSIBLE MAYOR ERROR ES $-\frac{1}{4} + 1 - \sqrt{1/2}$.