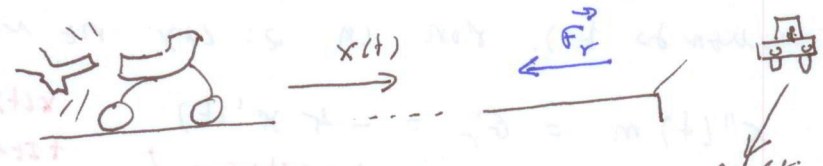
Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-2

Nombre y apellidos.....

1.- Un gamberro dió una patada a un cochecito de niño que estaba parado en la acera a $5m$ de la calzada. El cochecito salío disparado hacia la calzada con una velocidad de $2m/sg$. En defensa del crío salió una fuerza de rozamiento igual a $-Km$ donde $K = 1/3$ y m es la masa del cochecito. Sabiendo que en la calzada había un intenso tráfico ¿se salvó el niño? ¿Por qué la situación que plantea el problema no es real?



LA 2ª LEY DE NEWTON NOS DICE QUE

$$x''(t)\,m = \vec{F_r} = -Km = -\tfrac{1}{3}m$$

HIPÓTESIS

$$\begin{cases} x''(t)\,m = \vec{F_r} = -Km = -\tfrac{1}{3}m \\ x'(0) = 2\ m/s \quad \text{(SUPONEMOS EL COCHE PARADO ANTES DE LA PATADA)} \\ x(0) = -5\ m. \end{cases}$$

ESTAMOS ANTE UNA E.D.O. INMEDIATA, PUES APARECE x'' PERO NO x' NI x. ASÍ INTEGRANDO DOS VECES

$$\int x''(t)\,dt = \int -\tfrac{1}{3}\,dt \Rightarrow x'(t) = -\tfrac{1}{3}t + b$$

COMO $x'(0) = 2\ m/s \Rightarrow b = 2$

INTEGRANDO DE NUEVO $\int x'(t)\,dt = \int -\tfrac{1}{3}t + 2\,dt$

$$x(t) = -\tfrac{1}{6}t^2 + 2t + a.$$

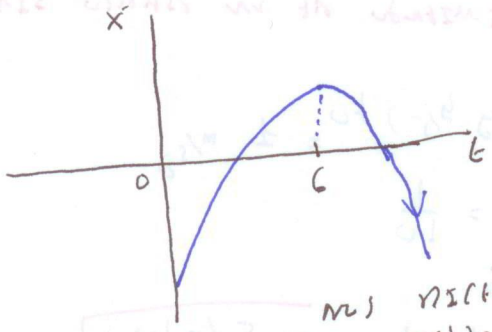
COMO $x(0) = -5 \Rightarrow a = -5$

REPRESENTAMOS $x(t) = -\tfrac{1}{6}t^2 + 2t - 5$

(CON $x'(t) = -\tfrac{1}{3}t + 2$, $x'(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = 6$

Y $x(6) = -\tfrac{1}{6}36 + 12 - 5 = 1$)

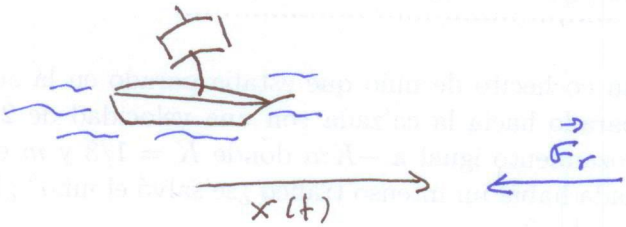
TENEMOS UNA PARÁBOLA Y $t_0 = 6$ ES UN MÁXIMO CON $x(6) = 1 > 0$



¡HURRA!

OBSERVACIÓN LA SOLUCIÓN, UNA PARÁBOLA, NOS DICE QUE EL COCHECITO ANTES DE ALCANZAR EL PUNTO $x(t) = 1$, PARA LO CUAL NO ES POSIBLE SI SOLO HA RECORRIDO UN LADO IMPOSIBLE. ¿CUÁL ES EL ERROR DEL MODELO? $\vec{F_r} \neq -Km$. LA FUERZA DE ROZAMIENTO NO PUEDE SER INDEPENDIENTE DEL MOVIMIENTO

2.- Un barco retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial de la nave es de $10m/sg$. Después de $5sg$ su velocidad es de $8m/sg$. ¿Después de cuánto tiempo la velocidad descenderá a $1m/sg$?



SUPONEMOS QUE EL BARCO NAVEGA EN LINEA RECTA Y SIN IMPULSO. SU POSICIÓN ES $x(t)$. (EN EL MOMENTO t). POR LA 2ª LEY DE NEWTON.

$$x''(t)\,m = F_r = -k\,x'(t)$$

ROZAMIENTO

$x(t)$ y F_r TIENEN SENTIDOS OPUESTOS.

$$\begin{cases} x'(0) = 10\ m/s \\ x'(5) = 8\ m/s \end{cases}$$

ESTAMOS ANTE UNA E.D.O LINEAL DE 1ª ORDEN (LA INCÓGNITA ES $x'(t)$). NECESITAMOS NO PERDER DE x' PARA DETERMINAR k Y LA SOLUCIÓN ÚNICA DEL PROBLEMA DE CAUCHY

$$\begin{cases} (x'(t))' = -\frac{k}{m}\,x'(t) \\ x'(0) = 10\ m/s \end{cases}$$

INTEGRANDO $\quad x'(t) = R\,e^{-k/m\,t} \quad R \in \mathbb{R}$

COMO $x'(0) = 10 \Rightarrow R = 10.$

ASÍ LA VELOCIDAD DEL BARCO ES $x'(t) = 10\,e^{-k/m\,t}$.

ADEMÁS $\quad 8 = x'(5) = 10\,e^{-k/m\,5}$. DESPEJANDO k/m

$$\frac{4}{5} = e^{-k/m\,5} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{5}\ln\frac{4}{5} = \frac{k}{m} > 0$$

ASÍ $\quad x'(t) = 10\,e^{\left(\frac{1}{5}\ln 4/5\right)t}$

OBSERVACIÓN COMO $\ln 4/5 < 0$, $x'(t)$ ES DECRECIENTE, COHERENTE CON EL MOVIMIENTO DE UN BARCO SIN IMPULSO.

NOS DICEN $\quad x'(t_0) = 10\,e^{(1/5\,\lg 4/5)\,t_0} = 1\ m/s$

DESPEJANDO $\quad e^{(1/5\,\ln 4/5)\,t_0} = \frac{1}{10}$

$$\left(\frac{1}{5}\lg\frac{4}{5}\right)t_0 = \ln\frac{1}{10}$$

Y ASÍ $\quad \boxed{t_0 = \frac{5}{\ln 4/5}\cdot\ln\frac{1}{10} = \frac{-5\ln 10}{\ln 4 - \ln 5}}$