Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-4

Nombre y apellidos.....

1.- Se considera la ecuación diferencial

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \qquad (*)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

1_1.- Si x_1 y x_2 son dos soluciones de la ecuación $(*)$ prueba que $x_1 + x_2$ es también solución de la ecuación.

Si x_1 es solución de $(*)$, entonces $x_1''(t) + a x_1'(t) + b x_1(t) = 0$. Lo mismo para x_2. Ahora metiendo $x_1 + x_2$ en la ecuación:

$$(x_1+x_2)''(t) + a\,(x_1(t)+x_2(t))' + b\,(x_1(t)+x_2(t)) =$$
$$= x_1''(t) + x_2''(t) + a\,(x_1'(t) + x_2'(t)) + b\,(x_1(t)+x_2(t)) =$$
$$= \left(x_1''(t) + a x_1'(t) + b x_1(t)\right) + \left(x_2''(t) + a x_2'(t) + b x_2(t)\right) =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

1_2.- Si x_1 es una solución de la ecuación $(*)$ y $r \in \mathbb{R}$ prueba que rx_1 es también solución de la ecuación.

Si metemos $r x_1(t)$ en la ecuación $(*)$

$$(r x_1(t))'' + a\,(r x_1(t))' + b\,(r x_1(t)) =$$
$$= r x_1''(t) + r a x_1'(t) + r b x_1(t) =$$
$$= r\,(x_1''(t) + a x_1'(t) + b x_1(t)) = r \times 0 = 0$$

ya que x_1 es solución. Por tanto $r x_1(t)$ es otra solución.

1_3.- Sea $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ una solución de la ecuación numérica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Prueba que la función $x(t) = e^{\lambda t}$ es una solución de la ecuación $(*)$.

Metemos $e^{\lambda_1 t}$ en la ecuación, para ello $x'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$ y $x''(t) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}$, luego

$$x''(t) + a x'(t) + b x(t) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + a \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_1 t} =$$
$$= e^{\lambda_1 t}(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) = 0$$

ya que λ_1 es solución de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Luego $e^{\lambda_1 t}$ es solución de $(*)$.

1_4.- Encuentra dos soluciones de ecuación diferencial $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$.

Consideramos $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$

Por 1_3 e^t y e^{-2t} son soluciones de la ecuación.

ya que $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$ son raíces de la ecuación numérica $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ (ecuación característica)

Observación: $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $r_1 e^t + r_2 e^{-2t}$ es una solución de la ecuación $x'' + x' - 2x = 0$ (por 1_3, 1_1 y 1_2.).

2.- Se considera la ecuación diferencial

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t) \qquad (**)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $f(t)$ es una función conocida.

2_1.- Si y es una solución de la ecuación $(**)$ y x_1 es una solución de la ecuación $(*)$, prueba que $y + x_1$ es una solución de la ecuación $(**)$.

y verifica que $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$

x_1 " que $x_1''(t) + ax_1'(t) + bx_1(t) = 0$

sumando $\boxed{f(t) = y''(t) + x_1''(t) + a(y'(t) + x_1'(t)) + b(y(t) + x_1(t))} =$

$\boxed{(y + x_1)''(t) + a(y + x_1)'(t) + b(y + x_1)(t)}$

usando las propiedades de las derivadas

lo que prueba que $y + x_1$ es una solución de $(**)$.

2_2- Encuentra dos soluciones de la ecuación:

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 3.$$

(**Indicación:** busca una solución estacionaria $y(t) = \text{cte}$ constante.)

Vemos en 1_b que e^t y e^{-2t} son dos soluciones de $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$

Ahora se busca $y(t) \equiv A$ constante y la metemos en la ecuación $(y' = 0 = y'')$

tenemos $-2A = 3$

despejando $A = -3/2$

Luego $y(t) \equiv -3/2$ es una solución estacionaria de la ecuación $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 3$.

Usando 2_1 se tiene que

$-3/2 + e^t$ y $-3/2 + e^{-2t}$

son dos soluciones de la ecuación.