Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-5

Nombre y apellidos.....

1.- Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -14x + 10y \\ x(0) = 1; \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Indicación: considera $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'}$ y después considera el cambio de variable $z(x) = \dfrac{y}{x}$.

LA CURVA PARAMETRIZA SOLUCIÓN $(x(t), y(t))$ TIENE PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE SUS EL PUNTO A

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{-14x + 10y}{x + y}$$

AHORA SI CONSIDERAMOS $y = y(x)$ TENEMOS QUE

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{-14x + 10y(x)}{x + y(x)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

E.D.O HOMOGÉNEA

SI HACEMOS EL CAMBIO PROPUESTO $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

TENEMOS

$$\begin{cases} z'(x) = \dfrac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{-14x + 10y}{x+y} - \dfrac{y}{x}\right] = \\ = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{-14 + 10\, y/x}{1 + y/x} - y/x\right] = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{-14 + 10z}{1+z} - z\right] = \\ = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{-14 + 9z - z^2}{1+z}\right] \\ z(1) = \dfrac{y(1)}{1} = 1. \end{cases}$$

E.D.O DE VARIABLES SEPARADAS

$$\int_1^x \frac{z'(s)(1+z(s))}{-14 + 9z(s) - z^2(s)}\, dx = \int_1^x \frac{z'(s)\, A}{z(s) - 2} + \frac{z'(s)\, B}{z(s) - 7}\, ds =$$

SEPARACIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

$$= \int_1^x \frac{z'(s)\,(+3/5)}{z(s) - 2}\, ds + \int \frac{z'(s)(-8/5)}{z(s) - 7}\, ds = +\frac{3}{5} \ln|z(x) - 2| - \frac{8}{5} \ln\frac{|z(x) - 7|}{6}$$

$$= \frac{1}{5} \ln \frac{6^8 |z(x) - 2|^3}{|z(x) - 7|^8}$$ POR OTRO LADO $\int_1^x \frac{1}{5}\, dx = \ln x$

LUEGO $\dfrac{6^8 (2 - z(x))^3}{(z(x) - 7)^8} = x^5$, COMO $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ SE SIGUE

QUE $$\frac{\left(2 - \frac{y(x)}{x}\right)^3}{\left(7 - \frac{y(x)}{x}\right)^8} = \frac{x^5}{6^8} \iff \frac{(2x - y(x))^3}{(7x - y(x))^8} = \frac{1}{6^8}$$

ASÍ $$\boxed{(y - 7x)^8 = 6^8 (2x - y)^3}$$

SOLUCIÓN EN IMPLÍCITAS. OBSERVEMOS QUE $(1,1)$ PERTENECE A LA CURVA.

2.- Halla la solución del sistema:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = -y + 1 \\ x(0) = 1; \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

Indicación: resuelve la segunda ecuación y después la primera.

$$\begin{cases} y' = -y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ sólo depende de y. Podemos resolverla

$y(0)=2$

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{1-y(s)}\,ds = -\ln|1-y(t)| + \ln|1-y(0)| = -\ln(y(t)-1)$$

por otra vez $\int_0^t 1\,dt = t$ así $\boxed{y(t) = 1 + e^{-t}}$

Por tanto la primera ecuación queda

$$\begin{cases} x' = x - 2(1+e^{-t}) + 1 = \\ \quad = x - 2e^{-t} - 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Esto lineal no homogénea de primer orden.

- $x(t) = ke^{t}$ es una solución de $x' = x$.
- $x = 1$ es solución de $x' = x - 1$
- ¿$x(t) = Ae^{-t}$ es solución de $x' = x - 2e^{-t}$?

$-Ae^{-t} = Ae^{-t} - 2e^{-t} \Rightarrow 2A - 2 = 0$ luego $A = 1$

Así $\boxed{x(t) = ke^{t} + 1e^{-t} + 1}$ $k \in \mathbb{R}$ es una solución general de la ecuación

- Imponemos la condición $x(0)=1$

y así $1 = k + 1 + 1 \Rightarrow k = -1$

La solución buscada es $\boxed{x(t) = -e^{t} + e^{-t} + 1}$

La solución única del problema es la curva paramétrica

$$(x(t), y(t)) = (-e^{t} + e^{-t} + 1,\ 1 + e^{-t}).$$