Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-6

Nombre y apellidos.....

1.- Se considera la E.D.O. $x'(t) = (x(t)+t)^2$. Supongamos que por cada punto del plano $(t,x) \in \mathbb{R}$ pasa una única solución de la ecuación.

1_1.- ¿Las soluciones de la ecuación son funciones crecientes o decrecientes? Justifica tu respuesta.

$x'(t) = (x(t)+t)^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, luego $x(t)$ es creciente.

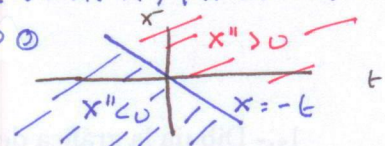
1_2.- Si una solución tuviese un máximo o mínimo ¿en que puntos (curva) del plano $\mathbb{R}^2$ estarían?

Como $x(t)$ es derivable, si en t_0 tuviese un máximo ó mínimo se tendría $0 = x'(t_0) = (x(t_0)+t_0)^2 \Rightarrow x(t_0) = -t_0$ luego el punto $(t_0, x(t_0)) = (t_0, -t_0)$ cae en la recta $\boxed{y(t) = -t.}$

1_3.- Deriva la ecuación y localiza donde (en que regiones del plano) las soluciones de las ecuación pueden ser convexas o concavas.

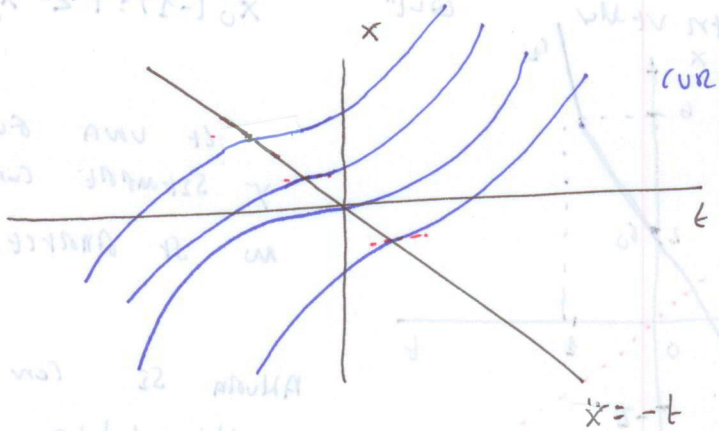
Derivando $x''(t) = 2(x(t)+t)(x'(t)+1) =$
$= 2(x(t)+t)((x(t)+t)^2+1)$ como $(x(t)+t)^2+1 > 0$

$$x''(t) \begin{cases} > 0 & \text{si } x > -t \\ < 0 & \text{si } x < -t \end{cases}$$



1_4.- Representa las gráficas (aproximadas) de las posibles soluciones de la ecuación diferencial.

Toda solución es creciente en $\mathbb{R}$, tiene un punto de inflexión donde corta a la recta $y(t) = -t$, punto donde cambia la curvatura



curvas solución

¡No se cortan entre sí!

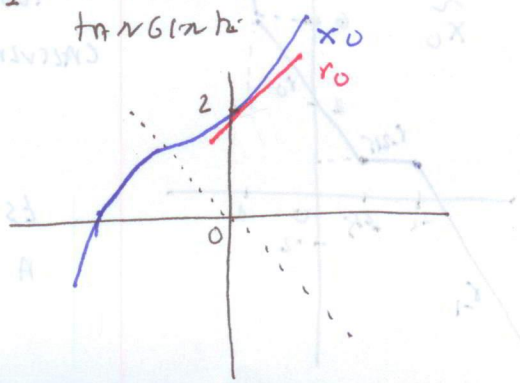
1_5.- Calcula la recta tangente a la solución de la ecuación que verifica que $x(0) = 2$. LLamaremos x_0 a la solución y r_0 a la recta tangente por el punto $(0,2)$.

x_0 cumple la ecuación luego

$x_0'(0) = (x_0(0)+0)^2 = 2^2 = 4$ pendiente de la recta tangente

Así r_0 es la recta

$$\boxed{r_0(t) = 4t + 2}$$



1_6.- Como x_0 y r_0 están cercanas para valores de t cercanos a cero, pongamos que $x_0(1) = r_0(1)$. Con esta suposición calcula la recta tangente a x_0 por el punto $(1, x_0(1)$. LLama a esta recta r_1.

$r_0(1) = 4\times 1 + 2 = 6$; si x_0 es solución y $x_0(1) = 6$

su recta tangente en el punto $(1, 6)$ será

$$r_1(t) = x_0'(1)(t-1) + 6 = 49t - 43$$

$$x_0'(1) = (x_0(1)+1)^2 = 7^2 = 49$$

1_7.- Haz lo mismo que en 1_6 tomando $x_0(-1) = r_0(-1)$. A la tangente por $(-1, x_0(-1))$ llámala r_{-1}.

$r_0(-1) = -4+2$; si x_0 es solución y $x_0(-1) = -2$

su recta tangente en el punto $(-1, -2)$ será

$$r_{-1}(t) = x_0'(-1)(t+1) - 2 = 9t + 7$$

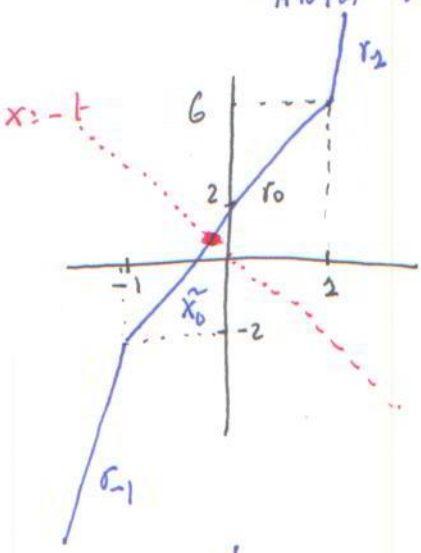
$$x_0'(-1) = (x_0(-1) - 1)^2 = 9$$

1_8.- Dibuja la gráfica de la función $\widetilde{x_0}(t) = \begin{cases} r_1(t) & \text{si} \quad t > 1 \\ r_0(t) & \text{si} \quad t \in [-1, 1] \\ r_{-1}(t) & \text{si} \quad t < -1. \end{cases}$ ¿Se parece algo esta gráfica a las soluciones que has representado en 1_4? ¿Y si intercalamos, además, $r_{-\frac{2}{5}}$?

Antes de pintar la gráfica de $\widetilde{x_0}$

observemos que

$x_0'(-1) = 9 \quad x_0'(0) = 4 < x_0'(1) = 49$



$\widetilde{x_0}$ es una función creciente

y con concavidad en $(-\infty, 1)$

y con convexidad en $(-1, \infty)$.

$\widetilde{x_0}$ es una recta en $[-1, 1]$.

Ahora se considera

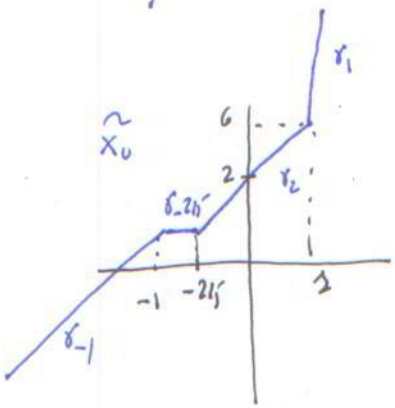
$$\begin{cases} r_0(t) = 4t + 2 \\ x = -t \end{cases} \iff -t = 4t + 2 \iff t = -2/5$$

considerando $r_{-2/5}(t) \equiv 2/5$

considerando $x_0(-1) = 2/5$ y con este valor calculamos el nuevo

$$r_{-1}(t) = x_0'(-1)(t+1) + 2/5 = \frac{9}{25}(t+1) + 2/5$$

$$x_0'(-1) = (x_0(-1) - 1)^2 = (2/5 - 1) = \frac{9}{25}$$



Este dibujo se parece un poco más a x_0