Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-7

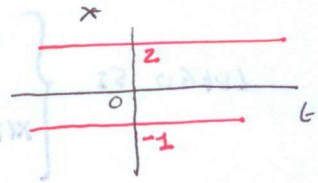
Nombre y apellidos.....

1.- Consideramos el problema de separación de variables $x'(t) = tx^2(t) - tx(t) - 2t$.

1_1.- Calcula las soluciones estacionarias (o constantes) del problema.

$x'(t) = t\,(x^2(t) - x(t) - 2) = t\,(x(t)+1)(x(t)-2)$

LUEGO $x \equiv -1$ y $x \equiv 2$ SON SOLUCIONES CONSTANTES



1_2.- Calcula la solución general del problema.

SI CONSIDERAMOS $x^2(t) - x(t) - 2 \neq 0$ (ó $u^2 - u - 2 \neq 0$)

EN DICHO CASO COMO LA E.D.O. ES DE VARIABLES SEPARADAS TENEMOS QUE

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)-x(t)-2}\,dt = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + k. \qquad k \in \mathbb{R}.$$

POR OTRO LADO

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)-x(t)-2}\,dx = \int \frac{du}{u^2-u-2} = \int \frac{du}{(u+1)(u-2)} =$$

$u = x(t)$

$du = x'(t)\,dt$

SEPARACIÓN ES EXACTA SI MAL

$$= \int \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-2}\,du = \int \frac{-1/3}{u+1}\,du + \int \frac{1/3}{u-2}\,du =$$

$A + B = 0$

$-2A + B = 1$

$$= 1/3\,[\ln|u-2| - \ln|u+1|] = 1/3 \ln\left|\frac{x(t)-2}{x(t)+1}\right| = \frac{t^2}{2} + k$$

$u = x(t)$

ASÍ, $\ln\left|\frac{x(t)-2}{x(t)+1}\right| = \frac{3}{2}t^2 + 3k$; $\left|\frac{x(t)-2}{x(t)+1}\right| = e^{3k}e^{3/2\,t^2}$

$\Rightarrow \frac{x(t)-2}{x(t)+1} = K e^{3/2\,t^2}$ $\quad K \in \mathbb{R}$ (USAMOS K PARA DESIGNAR $\pm e^{3k}$)

DESPEJAMOS $x(t)$, $\quad x(t) - 2 = K e^{3/2\,t^2} x(t) + K e^{3/2\,t^2} \Rightarrow$

$x(t) - K e^{3/2\,t^2} x(t) = 2 + K e^{3/2\,t^2}$ Y ASÍ

$$\boxed{x(t) = \frac{2 + K e^{3/2\,t^2}}{1 - K e^{3/2\,t^2}} \qquad K \in \mathbb{R}}$$

SOLUCIÓN GENERAL

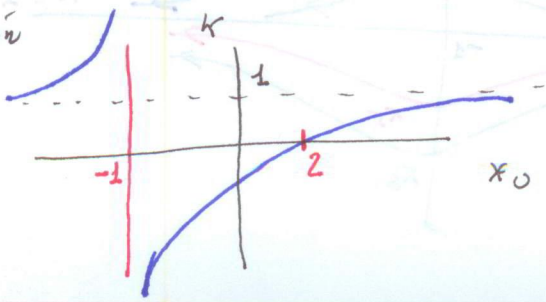
1_3.- La solución general del problema depende de una constante K. Relaciona esta constante con el dato inicial $x(0) = x_0$.

SI PEDIMOS A UNA SOLUCIÓN QUE $x(0) = x_0$ ($x_0 \neq 2$; $x_0 \neq -1$)

ENTONCES $x_0 = \frac{2+K}{1-K}$ Y DESPEJANDO $x_0 - Kx_0 = 2 + K$

ASÍ $\boxed{K = \frac{x_0 - 2}{x_0 + 1}}$

REPRESENTACIÓN



OBSERVACIÓN.
$K \in (0,1)$ SI Y SOLO SI $x_0 > 2$.

14.- Calcula los dominios de las curvas solución. PARA $x \equiv -1$ y $x \equiv 2$ es todo $\mathbb{R}$.

SEA $x(t) = \dfrac{2 + M e^{3/2 t^2}}{1 - M e^{3/2 t^2}}$; ESTA FUNCIÓN ESTÁ DEFINIDA SI

$M e^{3/2 t^2} \neq 1 \iff e^{3/2 t^2} \neq \dfrac{1}{M}$; COMO $e^{3/2 t^2} \geq 1 \ \forall t \Rightarrow M \notin (0,1)$.

PARA $M = 0$ TENEMOS $x \equiv 2$.

LUEGO SI $\begin{cases} x_0 \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2), \ 1 - M e^{3/2 t^2} \neq 1 \ \forall t \in \mathbb{R}; \text{ ASÍ } \operatorname{Dom} x = \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 > 2 \ (M \in (0,1)) \quad e^{3/2 t^2} < \dfrac{1}{M} \Rightarrow t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3} \ln \frac{1}{M}}, \sqrt{\frac{2}{3} \ln \frac{1}{M}}\right) \end{cases}$

RESTRINGIDO

15.- Dibuja las gráficas aproximadas de las curvas solución (**Indicación:** ten en cuenta que las gráficas de las soluciones no se cortan.)

- OBSERVEMOS QUE CUANDO $x_0 \downarrow 2 \Rightarrow M \downarrow 0$ y $\sqrt{\frac{2}{3} \ln \frac{1}{M}} \uparrow \infty$

- POR OTRO LADO $x(t) = \dfrac{2 + M e^{3/2 t^2}}{1 - M e^{3/2 t^2}}$ ES PAR $(x(t) = x(-t))$

- SI $x(0) = x_0 < 2$, $x_0 \neq -1$, $\operatorname{Dom} x = \mathbb{R}$ y

$$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{2 + M e^{3/2 t^2}}{1 - M e^{3/2 t^2}} = -1$$

- SI $x(0) = x_0 \in (-1, 2) \Rightarrow M < 0 \Rightarrow \lim_{t \to \pm\infty} x(t) = -1^+$

- SI $x(0) = x_0 < -1 \Rightarrow M > 0 \Rightarrow \lim_{t \to \pm\infty} x(t) = -1^-$

- LAS GRÁFICAS DE SOLUCIONES DISTINTAS NO SE CORTAN.

SI TOMAMOS $x(0) = x_1 > x_2 > 2 > x_3 > x_4 > -1 > x_5 > x_6$

$\delta_1 = \sqrt{\frac{2}{3} \ln \frac{1}{M_1}} < \sqrt{\frac{2}{3} \ln \frac{1}{M_2}} = \delta_2$