Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-9

Nombre y apellidos.....

1.- Dadas $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ funciones $n-1$-veces derivables sobre el intervalo (a,b) (**notación:** se escribe $y_i \in C^{n-1}[a,b]$ para $i = 1, 2, ..., n$) llamamos Wroskiano de las mismas a la función:

$$W(x) = W[y_1, y_2, ..., y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{n-1)}(x) & y_2^{n-1)}(x) & \cdots & y_n^{n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Prueba que si $y_i \in C^{n-1}[a,b]$, para $i = 1, 2, ..., n$, son linealmente dependientes (como vectores del espacio vectorial $C^{n-1}[a,b]$), entonces $W \equiv 0$ es la función constantemente igual a cero.

SI $y_1 .. y_n$ SON DEPENDIENTES EXISTEN $\lambda_1 .. \lambda_n \in \mathbb{R}$ NO TODOS NULOS DE MODO QUE

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + .. + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

DERIVANDO

$$\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + ... + \lambda_n y_n'(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 y_1^{n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{n-1)}(x) + .. + \lambda_n y_n^{n-1)}(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

COMO EL SISTEMA LINEAL DE ARRIBA (DE n ECUACIONES Y n INCÓGNITAS $\lambda_1 .. \lambda_n$) TIENE SOLUCIÓN NO NULA, ASÍ POR EL TEOREMA DE ROUCHÉ, EL DETERMINANTE DE LOS COEFICIENTES TIENE QUE SER NULO

$$W[y_1 .. y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) .. & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1)}(x) .. & y_n^{n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{PARA TODO } x \in (a,b)$$

1_2**.-** Sean y_1 e y_2 dos soluciones linealmente indenpendientes de la E.D.0. lineal homogénea:

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0,$$

con coeficientes p_1 y p_2 continuos sobre (a,b). Prueba que $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. (**Indicación:** usa el Teorema de Existencia y **Unicidad**).

SI EXISTE $x_0 \in (a,b)$ CON $W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$

ENTONCES $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ NO NULOS AMBOS DE MODO QUE

$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ ES UNA SOLUCIÓN DE LA E.D.O LINEAL, DE MODO QUE

$$y(x_0) = \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) = 0$$

$$y'(x_0) = \lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) = 0$$

POR EL TEOREMA DE UNICIDAD DE SOLUCIONES $y \equiv 0$ Y ASÍ y_1 E y_2 NO SON INDEPENDIENTES. LLEGAMOS A CONTRADICCIÓN.

2.- Encuentra la solución general de la E.D.O.: $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$, sabiendo que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. (**Indicación:** haz el cambio de variable $y(x) = y_1(x)z(x)$ y llega a una E.D.O. lineal de primer orden).

EN PRIMER LUGAR COMPROBAMOS QUE $y_1(x) = \frac{1}{x}$ ES SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

$y_1(x) = \frac{1}{x}$ $\quad y_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad y_1''(x) = \frac{2}{x^3}$ ENTRANDO EN LA ECUACIÓN.

$$x^2\left(\frac{2}{x^3}\right) - x\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 3\left(\frac{1}{x}\right) = 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x} - 3\frac{1}{x} = 0.$$

HACEMOS, AHORA, EL CAMBIO DE VARIABLE $y(x) = y_1(x)z(x)$.

$y(x) = \frac{1}{x} z(x)$ DERIVANDO

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2} z(x) + 1/x\, z'(x).$$

$$y''(x) = \frac{2}{x^3} z(x) - 1/x^2\, z'(x) - \frac{1}{x^2} z'(x) + \frac{1}{x} z''(x)$$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN CON y.

$$x^2\left[\frac{2}{x^3} z(x) - \frac{2}{x^2} z'(x) + \frac{1}{x} z''(x)\right]$$

$$- x\left[-\frac{1}{x^2} z(x) + \frac{1}{x} z'(x)\right]$$

$$- 3\frac{1}{x} z(x) = z(x)\underbrace{\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x}\right]}_{=0} - 3z'(x) + x z''(x) = 5x^4$$

y SOLUCIÓN

ASÍ $\boxed{z''(x) = \frac{3}{x} z'(x) + 5x^3}$ E.D.O LINEAL DE 1ª ORDEN (SI $u(x) = z'(x)$).

RESOLVEMOS ESTA ECUACIÓN.

LA HOMOGÉNEA $z''(x) = \frac{3}{x} z'(x) \Rightarrow z'(x) = kx^3$

AHORA EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE CONSTANTES SI $z'(x) = k(x)x^3$, DERIVANDO Y ENTRANDO EN LA ECUACIÓN

$$z''(x) = k'(x)x^3 + \cancel{k(x)3x^2} = \frac{3}{x}\cancel{k(x)x^3} + 5x^3$$

ASÍ $k'(x) = 5$ LUEGO $k(x) = 5x$.

POR TANTO $z'(x) = k_1x^3 + 5x^4$. INTEGRANDO

$$z(x) = k_1\frac{x^4}{4} + x^5 + k_2 \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

VOLVIENDO AL CAMBIO DE VARIABLES

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x} z(x) = k_1\frac{x^3}{4} + k_2\frac{1}{x} + x^4} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

ES FÁCIL COMPROBAR QUE x^3 Y $\frac{1}{x}$ SON DOS SOLUCIONES DE LA E.D.O HOMOGÉNEA ASOCIADA: $x^2y'' - xy' - 3y = 0$; Y QUE x^4 ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O.