EXAMEN FINAL: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

29 de enero de 2018

1.- Calcula la suma de los cuadrados de los coeficientes de la serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi)$ de la función

$$f(x) = \text{signo}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

.

2.- Si la transformada de Fourier de una función f es

$$\widehat{f}(\lambda) = i\frac{\text{sen}(\lambda^2 - 1)}{\lambda^2 - 1}$$

¿se puede afirmar que la función f no es par? Justifica tu respuesta.

3.- Calcula la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

4.- Dado el isomorfismo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_{140} &\to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \\ [a]_{140} &\mapsto ([a]_4, [a]_5, [a]_7) \end{aligned}$$

Encuentra la preimagen de $([2]_4, [3]_5, [4]_7)$.

5.- ¿Cuál es el orden máximo de un elemento en el grupo $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}, +)$? Encuentra uno que lo tenga.

6.- Determina las unidades (es decir los elementos con inverso respecto del producto) de $\mathbb{Z}_3[x]/(2x^2 + 1)$. Justifica tu respuesta.

La revisión del examen se efectuará el día 6 de febrero a las 17 horas en el aula 12. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Las siguientes funciones tienen por Transformadas de Laplace las funciones en s que figuran a su lado:

(1) Si $f(t) = 1$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{1}{s}$

(2) Si $f(t) = \text{sen}(t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{1}{s^2+1}$

(3) Si $f(t) = \cos(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

(4) Si $f(t) = e^{-\alpha t}$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{1}{s+\alpha}$

(5) Si $f(t) = \text{senh}(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

(6) Si $f(t) = \cosh(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$

(7) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\text{sen}(\beta t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(8) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(9) En general, dada $f(t)$, entonces $\quad L[e^{-\alpha t}f(t)](s) = Lf(s+\alpha)$

(10) Si $f(t) = t^n$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, ($\Gamma$ es la función Gamma de Euler).

(11) Si $f(t) = te^{-\alpha t}$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$

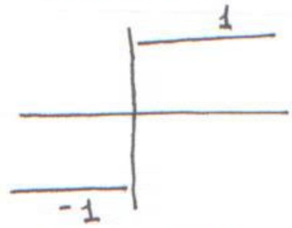
(12) Si $f(t) = t\text{sen}(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(13) Si $f(t) = t\cos(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(14) En general, dada $f(t)$, entonces $\quad L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{\partial^n Lf(s)}{\partial s^n}$

1] SEA $f(x) = \text{signo}(x) = \begin{cases} -1 & \text{SI } x < 0 \\ 0 & \text{SI } x = 0 \\ 1 & \text{SI } x > 0 \end{cases}$

VAMOS A CALCULAR SUS COEFICIENTES DE FOURIER, AUNQUE NO ES NECESARIO PARA RESOLVER EL PROBLEMA.



f ES UNA FUNCIÓN IMPAR

LUEGO $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \qquad \forall n = 0, 1, 2 \dots$

AHORA $\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \text{sen}\,nx\,dx =$

$\downarrow$ $f(x)\,\text{sen}\,nx$ ES PAR

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \\ 0 & \text{SI } n \text{ ES PAR.} \end{cases}$$

EL PROBLEMA PIDE CALCULAR

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2k-1)\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

COMO LA SERIE NUMÉRICA QUE APARECE ES CONVERGENTE. TENEMOS QUE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}\right)^2.$$

$\downarrow$ $a_n = 0$

POR OTRO LADO LA FAMILIA ORTOGONAL $\{1, \cos nx, \text{sen}\,nx\}$ ES COMPLETA EN $L_2[-\pi,\pi]$ Y $f(x) = \text{signo}(x) \in L_2[-\pi,\pi]$

LUEGO PODEMOS APLICAR LA IDENTIDAD DE PARSEVAL

QUE NOS DICE QUE

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\left(\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}^2 nx\,dx\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$$

$$\cancel{\pi}\,\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\cancel{\pi}$$

$\Longleftrightarrow$

$\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}^2 nx\,dx = \pi$

LUEGO $\boxed{\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = 2}$

2:] SEA f TAL QUE $\hat{f}(\lambda) = i\,\dfrac{\operatorname{sen}(\lambda^2-1)}{\lambda^2-1}$

ESTA FUNCIÓN $\hat{f}$ TOMA VALORES IMAGINARIOS PUROS... ADEMÁS

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\lambda x\, dx$$

SI f FUESE PAR LA FUNCIÓN $f(x)\operatorname{sen}\lambda x$ SERÍA UNA FUNCIÓN IMPAR Y POR TANTO

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\lambda x\, dx = 0$$

LUEGO $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx \in \mathbb{R}$ QUE NO ES EL CASO, LUEGO f $\underline{\underline{\text{NO}}}$ PUEDE SER UNA FUNCIÓN PAR.

3:]
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2e^{x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

PODEMOS RESOLVER ESTE PROBLEMA POR DOS MÉTODOS:

$\boxed{\text{PRIMERO}}$ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ES LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA $y'' - 3y' + 2y = 0$

ASÍ $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

LUEGO $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ ... $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA. UNA SOLUCIÓN PARTICULAR;

$y_0(x) = Axe^{x}$ PUEDE SER UNA RAÍZ DE LA EC. CARACTERÍSTICA

OBSERVEMOS QUE $\lambda = 1$ ES UNA

DERIVANDO

$y_0(x) = A x e^x$

$y_0'(x) = A e^x + A x e^x$

$y_0''(x) = 2A e^x + A x e^x$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN

$2Ae^x + A\cancel{x}e^x - 3(Ae^x + A\cancel{x e^x}) + 2A\cancel{x}e^x =$

$= - A e^x = 2e^x$

LUEGO $A = -2$

ASÍ $\boxed{y(x) = -2x e^x + C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad C_1\ C_2 \in \mathbb{R}}$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN

$y(0) = C_1 + C_2 = 0$

$y'(x) = -2e^x - 2xe^x + C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$

$y'(0) = -2 + C_1 + 2C_2 = 0$

LUEGO $C_1 + C_2 = 0$
$C_1 + 2C_2 = 2$

ASÍ $C_1 = -C_2$
$-C_2 + 2C_2 = C_2 = 2$

$C_2 = 2$ y $C_1 = -2$

LA SOLUCIÓN BUSCADA ES.

$y(x) = -2xe^x - 2e^x + 2e^{2x}$

COMPROBACIÓN $y(0) = -2 + 2 = 0$

$y'(x) = -2e^x - 2xe^x - 2e^x + 4e^{2x}$

$y'(0) = -2 - 0 - 2 + 4 = 0$

$y''(x) = -4e^x - 2xe^x - 2e^x + 8e^{2x}$

y ASÍ $(-6e^x + \cancel{8e^{2x}} - 2xe^x) - 3(\cancel{-2e^x} - \cancel{2xe^x} - 2e^x + \cancel{4e^{2x}}) +$
$+ 2(\cancel{-2xe^x} - 2e^x + \cancel{2e^{2x}}) = 2e^x$ CORRECTO.

SEGUNDO PODEMOS RESOLVER

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2e^x \\ y(0) = y'(0). \end{cases}$$

USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE:

$$\mathcal{L}(y'' - 3y' + 2y)(s) \underset{y(0)=y'(0)}{=} s^2 \mathcal{L}y - 3s\mathcal{L}y + 2\mathcal{L}(y) =$$

$$= (s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(2e^x)(s) = \frac{2}{s-1}$$

LUEGO $\mathcal{L}y(s) = 2\left[\frac{1}{(s-1)(s^2-3s+2)}\right] =$

$$= 2\frac{1}{(s-1)^2(s-2)} \underset{\text{DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES}}{=}$$

$$2\left[\frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-2}\right]$$

LUEGO $A(s-1)(s-2) + B(s-2) + C(s-1)^2 =$

$$= A[s^2 - 3s + 2] + B[s-2] + C[s^2 - 2s + 1] =$$

$$= (A + C)s^2 + [-3A + B - 2C]s + [2A - 2B + C] = 1$$

LUEGO
$$\begin{cases} A + \quad + C = 0 \\ -3A + B - 2C = 0 \\ 2A - 2B + C = 1 \end{cases}$$
VAMOS A RESOLVER EL SISTEMA

$A = -C$ LUEGO $\begin{matrix} B + C = 0 \\ -2B - C = 1 \end{matrix}$ ASÍ $B = -C$ Y $C = 1$

LUEGO $\mathcal{L}y(s) = 2\left[\frac{-1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-2}\right]$

MIRANDO EN LAS TABLAS

$$\boxed{y(x) = 2\left[-e^x - xe^x + e^{2x}\right] = -2xe^x - 2e^x + 2e^{2x}}$$

LA MISMA SOLUCIÓN QUE ANTES

4.] $f: \mathbb{Z}_{140} \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$

$x \longrightarrow f(x) = ([x]_4, [x]_5, [x]_7).$

Y BUSCAMOS

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 4 \\ x &\equiv 3 \mod 5 \\ x &\equiv 4 \mod 7 \end{aligned} \iff f(x) = ([2]_4, [3]_5, [4]_7)$$

APLICAMOS EL TEOREMA CHINO DEL RESTO.

4, 5, y 7 SON PRIMOS ENTRE SÍ.

LUEGO
$$\begin{aligned} x = {} & 2 \times 5 \times 7 \times [5 \times 7]_4^{-1} + \\ & 3 \times 4 \times 7 \times [4 \times 7]_5^{-1} + \\ & 4 \times 4 \times 5 \times [4 \times 5]_7^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & 2 \times 35 \times [3]_4^{-1} + \\ & + 3 \times 28 \times [3]_5^{-1} \\ & + 4 \times 20 \times [6]_7^{-1} = 70 \times 3 + 84 \times 2 + 80 \times 6 = \end{aligned}$$

$$= 210 + 168 + 480 =$$

$$= 858 \mod 4 \times 5 \times 7 = 140$$

ES DECIR
$$\begin{array}{r|l} 858 & 140 \\ \hline 018 & 6 \end{array}$$

$$\underline{\underline{= 18 \mod 140}}$$

<u>COMPROBACIÓN</u>
$$\begin{array}{r|l} 18 & 4 \\ \hline 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 5 \\ \hline 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

5º] ORDEN MÁXIMO DE UN ELEMENTO DE $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}\ +)$

EL ORDEN MÁXIMO ES EL

$$m.c.m(6,8,12) = 3 \times 8 = 24$$

CLARO SI $(a,b,c) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$

Y $n(a,b,c) = (a,b,c) + \underbrace{(a,b,c) + \dots + (a,b,c)}_{n-veces} =$

$= (na, nb, nc) = (0,0,0)$

$\Rightarrow na \in \mathbb{Z}_6$ LUEGO ord a puede ser 2 3 o 6

$nb \in \mathbb{Z}_8$ LUEGO ord b " " 2 4 o 8

$nc \in \mathbb{Z}_8$ LUEGO ord c 2, 4, 6 o 12

PARA QUE n SEA A LA VEZ MÚLTIPLO DE 2, 3, 4, 6, 8 o 12 ES NECESARIO Y SUFICIENTE QUE SEA MÚLTIPLO DE 24.

UN ELEMENTO DE ORDEN MÁXIMO ES (1, 1, 1)

$24 \times (1,1,1) = (24, 24, 24) = (0, 0, 0)$.

6º] $f(x) = 2x^2+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ ES UN POLINOMIO DE 2º GRADO QUE NO ES IRREDUCIBLE

$$2x^2+1 = 2(x^2+2) = 2(x-1)(x-2) = 2(x+2)(x+1)$$

LUEGO $\mathbb{Z}_3[x]/_{(2x^2+1)} = \{ax+b : a,b \in \mathbb{Z}_3\} =$

$= \{0, 1, 2, x, 2x, x+1, x+2, 2x+1, 2x+2\}$

↓ $3^2 = 9$ ELEMENTOS

$0, x+1, x+1, 2x+1 = 2(x+2), 2x+2 = 2(x+1)$

NO SON UNIDADES YA QUE SON DIVISORES DE CERO

$mcd(x, x^2+2) = x \cdot x + 2(x^2+2) = 1$

LUEGO POR EL LEMA DE BEZOUT x Y TAMBIÉN $2x$ TIENEN INVERSO

$(x)^{-1} = x$ y $(2x)^{-1} = 2x$; LAS UNIDADES BUSCADAS SON $(\mathbb{Z}_3[x]/f)^* = \{1, 2, x, 2x\}$