EXAMEN FINAL: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

10 de Enero de 2019

1.- Sea la sucesión $f_n(x) = \dfrac{\cos x \operatorname{sen} x}{n^2 x}$, con $x \in (0, \pi/4]$.

a) Analiza la convergencia puntual de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Estudia la convergencia uniforme de la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2.- La transformada de Fourier de una señal $f(x)$ es

$$F(\omega) = \begin{cases} 1-\omega & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1+\omega & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcula $f(x)$.

3.- Encuentra la solución del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 2\sin(2x) \\ y(0) = 0, \ y(\pi/4) = 0 \end{cases}$$

4.- Determina las dos últimas cifras de 18^{2019}.

5.- Da un ejemplo de un grupo abeliano G de orden 72 cuyos elementos tengan a lo más orden 6. Encuentra un elemento de G de orden 3.

6.- Encuentra en $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1)$ dos elementos, de modo que uno tenga inverso, calcula el inverso; y otro NO tenga inverso.

La revisión del examen se efectuará el lunes 21 de Enero a las 15 horas en el aula 11. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

1:] $f_n(x) = \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{n^2 x}$ $x \in (0, \pi/2]$

a) LÍMITE PUNTUAL

SI $x \in (0, \pi/2]$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{n^2 x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{\cos x \operatorname{sen} x}{x}\right) = 0$

LUEGO $f \equiv 0$ ES EL LÍMITE PUNTUAL DE $\sum f_n(x)$.

b) CONVERGENCIA UNIFORME

USAREMOS LA PRUEBA M-WEIERSTRASS,

$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ $\left|\frac{\cos x \operatorname{sen} x}{n^2 x}\right| \leq M \frac{1}{n^2}$ DONDE M SALE DE:

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

COMO $g(x) = \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{x}$ ES CONTINUA EN $(0, \pi/2]$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, $g(\pi/2) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}$.

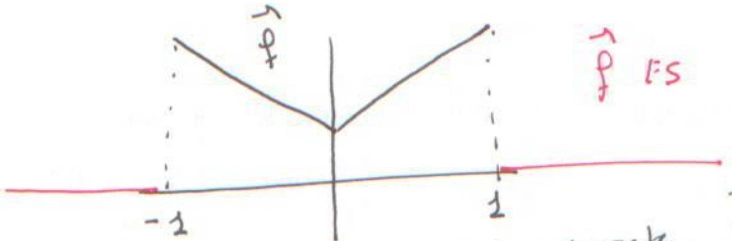
$\cos x \operatorname{sen} x \neq 0$ $\forall x \in (0, \pi/2)$

EXISTE M TAL QUE $\left|\frac{\cos x \operatorname{sen} x}{x}\right| \leq M$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

ASÍ COMO $\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{1}{n^2} < \infty$, SE SIGUE LA CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FUNCIONES EN UNIFORME DE $(0, \pi/2]$.

2:] $f(x)$ es tal que existe

$$\hat f(w) = \begin{cases} 1-w & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1+w & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



$\hat f$ es par

Por el enunciado que como existe $\hat f$, $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Como $\hat f$ es nula fuera de $[-1,1]$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat f| = \int_{-1}^{1} |\hat f| < \infty$ por ser continua $\hat f$.

Luego $\hat f \in L_1(\mathbb{R})$. Así el teorema de inversión nos dice que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat f(w) e^{iwx}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \hat f(w) (\cos wx + i \operatorname{sen} wx)\, dw =$$

$\hat f$ par $\Rightarrow$ $\hat f$ sen impar

$\hat f$ par $\Rightarrow$ $\hat f$ cos par

$$= \frac{2}{2\pi} \int_0^1 (1+w) \cos wx\, dw =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 \cos wx\, dw + \int_0^1 w \cos wx\, dw \right) = \frac{\operatorname{sen} x}{\pi x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\pi x} + \frac{\cos x}{\pi x^2} - \frac{1}{\pi x^2}$$

Ya que

$$\int_0^1 \cos wx\, dw = \frac{\operatorname{sen} wx}{x} \Big|_0^1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\int_0^1 w \cos wx\, dw \underset{\text{partes}}{=} \frac{w \operatorname{sen} wx}{x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} wx}{x}\, dw =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 - \operatorname{sen} wx\, dw = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{1}{x} \left(\frac{\cos wx}{x} \Big|_0^1 \right.$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

Así $\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2 \operatorname{sen} x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)}$

3:) $\begin{cases} y'' + 4y = 2\,\text{sen}(2x) \\ y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 0 \end{cases}$

Como las condiciones no están dadas en $y(0)$ e $y'(0)$, es conveniente usar la función característica

Ecu homogénea asociada

$$y'' + 4y = 0$$

Ec característica $\lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda = \pm 2i$

Luego $\boxed{y(x) = C_1 \cos 2x + C_2\,\text{sen}\,2x}$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

solución general de la homogénea

Solución particular

Como $2i$ es una solución de la ec característica

probamos una solución del tipo

$$y_0(x) = Ax\cos 2x + Bx\,\text{sen}\,2x$$

$$y_0'(x) = A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x - 2Ax\,\text{sen}\,2x + 2Bx\cos 2x$$

$$y_0''(x) = -2A\,\text{sen}\,2x + 2B\cos 2x - 2A\,\text{sen}\,2x + 2B\cos 2x$$
$$- 4Ax\cos 2x - 4Bx\,\text{sen}\,2x =$$
$$= -4A\,\text{sen}\,2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\,\text{sen}\,2x$$

y así $y_0'' - 4y_0 = \cancel{\left(-4Ax\cos 2x - 4Bx\,\text{sen}\,2x\right)} - 4A\,\text{sen}\,2x + 4B\cos 2x$
$$+ 4\cancel{\left(Ax\cos 2x + Bx\,\text{sen}\,2x\right)} = 2\,\text{sen}(2x)$$

Luego $A = -1/2$ y $B = 0$

Así $y_0(x) = -1/2\, x\cos 2x$ es una solución particular

y $\boxed{y(x) = -1/2\, x\cos 2x + C_1\cos 2x + C_2\,\text{sen}\,2x}$ solución general de la ecu

Si $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C_1 + 0$ luego $C_1 = 0$

Así $y(x) = -1/2\, x\cos 2x + C_2\,\text{sen}\,2x$

Si $0 = y(\pi/4) = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} + C_2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = C_2$ luego $C_2 = 0$

Así $\boxed{y(x) = -1/2\, x\cos 2x}$ es la solución buscada

4:] ¿ $18^{2019} \equiv x \mod 100$?

Como $mcd(18,100) = 2 \neq 1$, pasamos a considerar el problema del siguiente modo

$$18^{2019} \equiv x \in \mathbb{Z}_{100} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$$

$mcd(4,25) = 1$

Así $18^{2019} \in \mathbb{Z}_{100}$ pasa a ser

$$\left([18^{2019}]_4, [18^{2019}]_{25}\right) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$$

Como $4 \mid 18^{2019} \Rightarrow [18^{2019}]_4 \equiv 0$

Como $mcd(18,25) = 1$ entonces

$$18^{\Phi(25)} \equiv 1 \mod 25 \quad \text{(Teorema de Euler)}$$

$\Phi(25) = \Phi(5^2) = 5^2\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20.$

Luego $2019 \; \underline{|20}$

$\underline{19}$

$$[18^{2019}]_{25} = [18^{20\times 100 + 19}]_{25} = [18^{19}]_{25} = [(18^2)^9]_{25}[18]_{25} =$$

$$= [-1^9]_{25}[18]_{25} = [-1]_{25}[18]_{25} = [-18]_{25} \equiv [7]_{25}$$

$[(18)^2]_{25} = [24]_{25} = [-1]$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 324 & 25 \\ 74 & 12 \\ 24 & \end{array}$$

Luego $\left([18^{2019}]_4, [18^{2019}]_{25}\right) \equiv ([0]_4, [7]_{25})$.

Usando el teorema chino del resto buscamos

$x \equiv 0 \mod 4$

$x \equiv 7 \mod 25$

$$\Rightarrow x = 0 + 7 \times 4 \times \underbrace{19}_{[4]^{-1}_{25}} \mod 100$$

Así $x \equiv 432 \equiv 32 \mod 100$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 19 \\ \hline 252 \\ 18 \\ \hline 432 \end{array}$$

Solución 32.

5º) Los grupos abelianos finitos G son de la forma

$$G \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_s}$$

con $d_1 > 1$, $d_1 \mid d_2$ $d_2 \mid d_3 \ldots$ $d_{s-1} \mid d_s$

Así en nuestro caso

$$d_1 \times d_2 \times \quad \times d_s = 72$$

$$y \quad m\,c\,m\,(d_1 d_2 \ldots d_s) = 6$$

como $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 9^2 = 2 \times 6 \times 6$

$$\boxed{G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6}$$

Para encontrar un elemento en G de orden 3

como en $\mathbb{Z}_2$ no hay, tomamos $x_1 = 0$

en $\mathbb{Z}_6$ 2 tiene orden 3 tomamos $x_2 = 2$

Así el elemento $\boxed{(0, 2, 2) \in G}$ verifica

que $(0, 2, 2) + (0, 2, 2) + (0, 2, 2) = (0, 0, 0)$

tiene orden 3.

6:] $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1)$

El polinomio $p(x) = x^2+1 \in \mathbb{Z}_5[x]$

no es irreducible ya que $p(2) = 4+1 \equiv 0 \mod 5$

Además $x^2+1 = (x-2)(x-3) = (x^2 \underbrace{-5x}_{=0} + \underbrace{6}_{=1})$

Luego $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1)$ no es un cuerpo.

Es un anillo conmutativo, pero no es dominio de integridad.

- $[x-2]$ y $[x-3]$ en $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1)$ son divisores de cero y por tanto no tienen inversos

$[x-2] \neq 0$ $[x-3] \neq 0$ y $[x-2][x-3] =$

$= [(x-2)(x-3)] = [x^2+1] \equiv 0$

- Tomamos $[x]$ con $mcd(x, x^2+1) = 1$

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x \\ \hline -x^2 & x \\ 1 & \end{array}$$

Luego $x^2+1 = x \cdot x + 1$ Así

$[x^2+1] = [x][x] + [1]$

$0 = [x][x] + [1] \Rightarrow [4] = [x][x]$

Luego multiplicando por $[4]_5^{-1} = [4]_5$

$[x][4x] = [1]$

Así $\boxed{[x]^{-1} = [4x]}$