AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen de Febrero; 6-Febrero-2013

1.- a) Estudia la convergencia de la sucesión de funciones $\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[1,2]$.
b) Calcula $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{1-x^n}{1+x^n}dx$.

2.- Considera las dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ definidas por:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (-1,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (-1,1] \\ 2-x & \text{si} \quad x \in (1,3] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se pide: *i)* hallar la transformada integral de Fourier de $f_1(x)$; *ii)* dibujar $f_2(x)$ y calcular su transformada usando el resultado anterior junto con las propiedades de la transformada.

3.- Resuelve el siguiente problema de Cauchy usando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 15y = e^{-x+2} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

4.- En $(\mathbb{Z}_5 \mathrm{x} \mathbb{Z}_6, +)$ encuentra un elemento de orden máximo distintinto del $(1,1)$. Razona la respuesta.

5.- Considera el conjunto de matrices

$$\mathbf{R} = \{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{bmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \}$$

con las operaciones usuales de suma $+$ y multiplicación $\times$ entre matrices. Se pide: *i)* demostrar que $(\mathbf{R}, +, \times)$ es anillo conmutativo; determinar los elementos unidad y los divisores de cero en $(\mathbf{R}, +, \times)$.

6.- En $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3+x+1 \rangle$ halla el inverso multiplicativo de $[x]$ y de $[x+1]$. Usa los resultados obtenidos para determinar el inverso de $[x^2+x]$.

Observaciones:

.- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.
.- Cada pregunta se puntua con un máximo de 1,5 puntos.
.- La **revisión del examen** será el próximo jueves 14 de Febrero a las 14h en el aula 12.

Problema 1

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x=1 \\ -1 & \text{si } x\in(1,2]. \end{array} \right\} = f(x)$$

$f(x)$ es el límite puntual, que no es continua en $x=1$; como cada f_n es continua en $[1,2]$, no puede haber convergencia uniforme en todo el intervalo $[1,2]$.

¿Habrá convergencia uniforme en $[a,2]$ con $a>1$? Veámoslo.

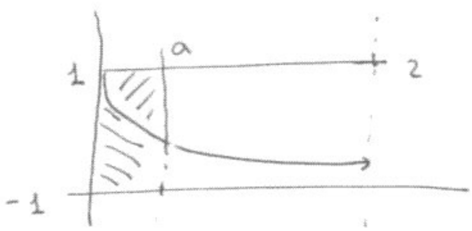
Gráfico de f_n:

$\mathrm{Dom}\, f_n = [1,2]$, continua y $f_n \leq 1$

$$f_n'(x) = \frac{-n\,x^{n-1}(1+x^n) - (1-x^n)\,n\,x^{n-1}}{(1+x^n)^2} =$$

$$= -\frac{n\,x^{n-1}}{(1+x^n)^2}\left(1+x^n+1-x^n\right) = -\frac{2n\,x^{n-1}}{(1+x^n)^2} \leq 0 \quad \text{luego } f_n \text{ es}$$

decreciente; $\quad f_n(1)=0$ y $f_n(2) = \dfrac{1-2^n}{1+2^n} \geq -1$



Fijando $a>1$, como f_n es decreciente

$$\left|-1 - f_n(x)\right| \leq \left|-1 - f_n(a)\right| =$$

$$= 1 + \frac{1-a^n}{1+a^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Luego hay convergencia uniforme sobre $[a,2]$ con $a>1$

$$-1 \leq \int_1^2 \frac{1-x^n}{1+x^n} = \int_1^a \frac{1-x^n}{1+x^n} + \int_a^2 \frac{1-x^n}{1+x^n} \leq \int_a^2 \frac{1-x^n}{1+x^n}$$

$$\frac{1-x^n}{1+x^n} \leq 0$$

tomando límites

$$-1 \leq \lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{1-x^n}{1+x^n} \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^2 \frac{1-x^n}{1+x^n}\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{convergencia} \\ \text{uniforme}}}{=} \int_a^2 -1\,dx = -2+a$$

Como lo anterior es cierto para toda $a>1$,

se sigue que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{1-x^n}{1+x^n} = -1$ //

EJERCICIO 2

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-1,1) \\ 2-x & \text{si } x \in (1,3] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\hat{f}_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, e^{-isx}\,dx = \int_{-1}^{1} x\, e^{-isx}\,dx = \underset{\text{partes}}{}$$

$$= \frac{x e^{-isx}}{-is}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{is}\int_{-1}^{1} e^{-isx}\,dx =$$

$$= -\frac{e^{-is}}{is} - \frac{e^{is}}{is} + \frac{1}{is}\left[\frac{e^{-isx}}{-is}\Big|_{-1}^{1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{is}\left[\cos s + i\cancel{\operatorname{sen} s} + \cos s - i\cancel{\operatorname{sen} s}\right] +$$

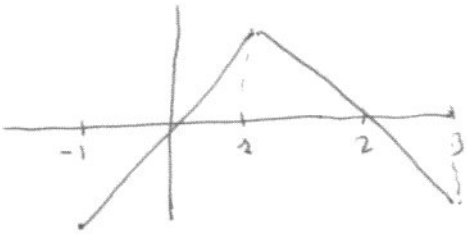
$$-\frac{1}{i^2 s^2}\left[e^{-is} - e^{is}\right] =$$

$$= -\frac{2}{is}\cos s - \frac{1}{(-1)s^2}\left[\cancel{\cos s} - i\operatorname{sen} s - \cancel{\cos s} - i\operatorname{sen} x\right] =$$

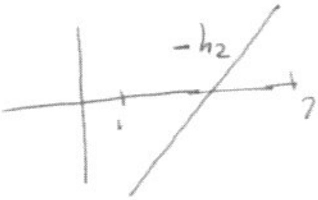
$$= -\frac{2}{is}\cos s + \frac{1}{s^2}\left[-2i\operatorname{sen} s\right] =$$

$$= \frac{2i}{s}\cos s - \frac{2i}{s^2}\operatorname{sen} s = \frac{2i}{s}\left[\cos s - \frac{\operatorname{sen} s}{s}\right]$$

$f_2(x)$ se descompone por



$$\text{si } h_2(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \in (1,3] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



$$f_2(x) = f_1(x) + h_2(x) = f_1(x) - (-h_2(x))$$

y así $\hat{f}_2 = \widehat{f_1 - (-h_2)} = \hat{f}_1 - \widehat{(-h_2)}$

$$-\hat{h}_2(s) = \int_1^3 (x-2)\, e^{-isx}\,dx = \int_{-1}^{1} y\, e^{-is(y-2)}\,dy =$$

$y = x-2$, $dy = dx$

$$= e^{i2s}\int_{-1}^{1} y\, e^{-isy}\,dy = e^{i2s}\hat{f}_1(s)$$

Luego $\hat{f}_2(s) = \hat{f}_1(s) - e^{i2s}\hat{f}_1(s) = (1 - e^{i2s})\,\frac{2i}{s}\left[\cos s - \frac{\operatorname{sen} s}{s}\right].$

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 15y = e^{-x}e^{2} \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

APLICANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$s^2 \mathcal{L}y(s) - 2s\mathcal{L}y(s) + 15\mathcal{L}y(s) = e^2 \mathcal{L}(e^{-x})(s) =$$

$$= \frac{e^2}{s+1}$$

LUEGO $\mathcal{L}y(s) = \dfrac{e^2}{(s+1)(s^2-2s+15)} \underset{\downarrow}{=}$

SEPARACIÓN EN FRACCIONES SIMPLES
$s^2-2s+15$ IRREDUCIBLE

$$= e^2\left[\frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+15}\right] =$$

ASÍ $A(s^2-2s+15) + (s+1)(Bs+C) =$

$$= As^2 - 2sA + 15A + Bs^2 + (B+C)s + C =$$

$$= (A+B)s^2 + (-2A+B+C)s + (15A+C) = 1$$

ASÍ $A+B=0 \Rightarrow A=-B$

$3B+C=0 \Rightarrow C=-3B$

Y $15(-B) - 3B = 1 \Rightarrow B=-\frac{1}{18}$, $A=\frac{1}{18}$ Y $C=\frac{1}{6}$

$$= e^2\left[\frac{1}{18}\frac{1}{s+1} + \frac{-\frac{1}{18}s + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} - \frac{1}{18}}{(s^2-2s+1)+(\sqrt{14})^2}\right] =$$

$$= \frac{e^2}{18}\frac{1}{s+1} - \frac{e^2}{18}\cdot\frac{s-1}{(s-1)^2+(\sqrt{14})^2} + \frac{e^2}{9}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+(\sqrt{14})^2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}$$

USANDO LAS TABLAS SE SIGUE QUE

$$y(x) = \frac{e^2}{18}e^{-x} - \frac{e^2}{18}\cos\sqrt{14}\,x\,e^{x} + \frac{e^2}{9\sqrt{14}}\operatorname{sen}\sqrt{14}\,x\,e^{x}$$

— o —

PROBLEMA 4] Como $m.c.d(5,6)=1$

$$(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 +) \cong (\mathbb{Z}_{30} +) \quad \text{cíclico}$$

Por tanto, por ser cíclico existe un elemento con orden el orden del grupo en este caso 30.

$1 \in \mathbb{Z}_{30}$ es un generador de orden 30 y

por tanto $([1]_5, [1]_6) = (1,1)$ es un generador en $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 +)$

Tomamos $7 \in (\mathbb{Z}_{30} +)$ como $m.c.d(7,30)=1$, así $m.c.m.(7,30) = 7 \times 30$, luego 7 tiene orden 30 y $([7]_5, [7]_6) = (2,1)$ tiene orden 30 en $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 +)$.

PROBLEMA 5] Sean $A, A' \in R$

$$A - A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & 0 & 0 \\ 0 & a-a' & 0 \\ b-b' & c-c' & a-a' \end{pmatrix} \in R$$

Luego $(R +)$ es un subgrupo de $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ que sabemos que es un anillo con unidad no conmutativo.

Sean $A, A' \in R$

Si $A' \neq 0$, $A' = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ b & c & a' \end{pmatrix}$ con $a' = 1 \in \mathbb{Z}_2$

Observemos que $A' \cdot A' = I$ ya que $b'a' + a'b' =$
$= c'a' + a'c' = 0$
$\forall a', b', c' \in \mathbb{Z}_2$

Ahora $A(A') = A \cdot A' =$

$$= \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & aa' & 0 \\ ba'+b'a & ca'+c'a & aa' \end{pmatrix} \in R \quad (*)$$

Luego $(R \times)$ es una operación cerrada en R.
Por tanto R es un anillo; de $(*)$ se observa que es conmutativo; que $I \in R$ tiene unidad.
Para que encontrar los divisores de cero

Si $A \in R$, y $A \neq 0$ y $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$

si $a \neq 0$ entonces existe A^{-1}, luego no es divisor de cero;

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ y sea $A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b' & c' & 0 \end{pmatrix}$

$$AA' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ba & ca & 0 \end{pmatrix}$$ luego si $a = 0$ y $b' \neq 0$ ó $c' \neq 0$

se sigue que A es divisor de cero

Luego $R' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \in R \quad b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ son

todos los divisores de cero de R'.

PROBLEMA 6: $f(x) = x^3+x+1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ es irreducible

ya que es de grado 3 y
$f(0) = 1$
$f(1) = 3$
$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = 4$.

Luego $\mathbb{Z}_5[x]/_{x^3+x+1}$ es un cuerpo finito de

cardinal $5^3 = 125$.

$$\begin{array}{l|l} x^3+x+1 & x \\ \hline -x^3 & x^2+1 \\ \quad x & \\ \quad x & \\ \quad\; 1 & \end{array}$$

Luego $x(x^2+1) + 1 = x^3+x+1$.

$\Leftrightarrow [x][x^2+1] + 1 = 0$

$\Leftrightarrow [x][x^2+1] = -1$

$\underset{x(-1)^{-1}}{\Leftrightarrow} [x][4x^2+4] = 1$

Así $[x]^{-1} = [4x^2+4]$

Por otro lado $(x+1) = -x^3$

Luego $[x+1]^{-1} = [-x^3]^{-1} = [-1]^{-1}[x^3]^{-1} = [-1]^{-1}([x]^{-1})^3 =$

$= 4[4x^2+4]^3 =$

$= 4[64x^6 + 3\times 16x^4 \times 4 + 3\,4x^2 \times 4^2 + 4^3] =$

$= 4 \times 4[x^6+3x^4+3x^2+1] = x^6+3x^4+3x^2+1 =$

$= (x^3+2x-1)(x^3+x+1) + (x^2-x+2) = x^2-x+2$

$$\begin{array}{l|l} x^6+3x^4+3x^2+1 & x^3+x+1 \\ \hline -x^6-x^4-x^3 & x^3+2x-1 \\ 2x^4-x^3+3x^2+1 & \\ -2x^4 \quad -2x^2-2x & \\ \quad -x^3+x^2-2x+1 & \\ \quad x^2-x+2 & \end{array}$$

Luego $[x^2+x]^{-1} = ([x][x+1])^{-1} = [x]^{-1}[x+1]^{-1} =$

$= (4x^2+4)(x^2-x+2) = 4x^4 - 4x^3 - 2x + 4 =$

$= 4x^4 + 2x + 3 = x^2+3x+3$.