AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen final: 3 de febrero de 2015

1.- Calcula la serie de Fourier de la función:

$$f(x) = x^3, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

2.- Calcula la transformada de Fourier de la convolución $f * g$, con $f(x) = x\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$, $g(x) = \cos(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$.

3.- Calcula las funciones $x(t)$ y $y(t)$ que verifican el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{rcrcl} 2x'(t) & + & y(t) & = & 1 \\ x(t) & + & 2y'(t) & = & t \end{array}$$

y las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $y(0) = 1$.

(**Indicación:** Aplica la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema, resuelve el sistema en transformadas y después resuelve los problemas inversos que aparecen).

4.- Resuelve el sistema de congruencias:

$$\left.\begin{array}{rclcr} x & \equiv & 1 & \mod & 3 \\ x & \equiv & 7 & \mod & 10 \\ 2x & \equiv & 3 & \mod & 7 \end{array}\right\}$$

5.-

a) Encuentra un subgrupo de orden 4 en el grupo $(\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3, +)$.

b) ¿Cuántos subgrupos de orden 5 tiene el grupo anterior?

6.- Sea $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.

a) Calcula su característica, su cardinal y justifica si es o no un cuerpo.

b) Lista dos elementos de $\mathbb{F}^*$ que sean generadores.

C) Halla el inverso y una raíz cuadrada de $[x]$ en $\mathbb{F}$.

Observaciones:

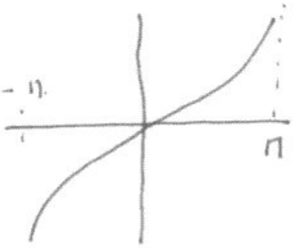
.- En el examen sólo se puede utilizar papel y bolígrafo

.- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.

.- Cada pregunta se puntua con un máximo de 1,5 puntos.

.- La **revisión del examen** será el próximo martes 10 de febrero a las 17h en el aula 2.

1:] $f(x) = x^3 \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$



f ES UNA FUNCIÓN IMPAR
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

LUEGO SUS COEFICIENTES DE FOURIER
a_0 y a_n $n \in \mathbb{N}$ SON NULOS.

POR OTRO LADO

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\, nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\,\text{sen}\, nx\, dx =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{INTEGRANDO} \\ \text{POR PARTES}}}{=} -\frac{x^3 \cos nx}{\pi n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-\pi^3 \cos n\pi + (-\pi)^3 \cos n\pi + 3\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx\right]$$

$$= -\frac{2}{n}\pi^2(-1)^n + \frac{3}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{INTEGRANDO} \\ \text{POR PARTES}}}{=}$$

$$= -\frac{2}{n}\pi^2(-1)^n + \frac{3}{\pi n}\left[x^2\frac{\text{sen}\, nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}\, nx\, dx\right]$$

$$= -\frac{2}{n}\pi^2(-1)^n - \frac{6}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}\, nx\, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{INTEGRANDO} \\ \text{POR PARTES}}}{=}$$

$$= -\frac{2}{n}\pi^2(-1)^n - \frac{6}{\pi n^2}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx\right]$$

$$= -\frac{2}{n}\pi^2(-1)^n - \frac{6}{\pi n^2}\left[-\frac{\pi}{n}2(-1)^n + \frac{1}{n}\,0\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\pi^2(-1)^{n+1} + \frac{12}{n^3}(-1)^n$$

LA SERIE DE FOURIER DE LA FUNCIÓN ES.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n\,\text{sen}\, nx$$

Y SI $x \in (-\pi, \pi)$, COMO ALLÍ f ES CONTINUA Y DERIVABLE

$$x^3 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n\,\text{sen}\, nx$$

2:] $\widehat{f * g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \cdot \hat{g}(\lambda)$.

LA CONVOLUCIÓN SE CONVIERTE EN UN PRODUCTO AL APLICAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER. ASÍ

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-i\lambda x} dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x \cos\lambda x \, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{sen}\lambda x \, dx$$

POR SER $f(x) = x$ IMPAR, LA PRIMERA INTEGRAL ES NULA

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}\lambda x \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{INTEGRANDO} \\ \text{POR PARTES}}}{=} -\frac{x \cos\lambda x}{\lambda}\Big|_{-\pi}^{\pi} + 1/\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos\lambda x \, dx =$$

$$= \frac{-\pi \cos\lambda\pi}{\lambda} - \frac{\pi \cos\lambda\pi}{\lambda} + 1/\lambda \left[\frac{\operatorname{sen}\lambda x}{\lambda}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right] =$$

$$-\frac{2\pi}{\lambda}\cos\lambda\pi + \frac{2}{\lambda^2}\operatorname{sen}\lambda\pi$$

LUEGO $\hat{f}(\lambda) = \frac{2i}{\lambda}\left[\pi\cos\lambda\pi - \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\lambda}\right]$

POR LADO

$$\hat{g}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos\lambda x \, dx - i\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \operatorname{sen}\lambda x \, dx$$

COMO EL $\cos x$ ES UNA FUNCIÓN PAR LA SEGUNDA INTEGRAL ES NULA Y ASÍ

$$\hat{g}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos\lambda x \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \cos A \cos B = 1/2(\cos(A+B) + \cos(A-B))}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos(x(1+\lambda)) + \frac{1}{2}\cos(x(1-\lambda)) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(x(1+\lambda))}{1+\lambda}\Big|_{-\pi}^{\pi} + 1/2\,\frac{\operatorname{sen}(x(1-\lambda))}{1-\lambda}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\pi(1+\lambda))}{1+\lambda} + \frac{\operatorname{sen}(\pi(1-\lambda))}{1-\lambda} = \frac{(1-\lambda)\operatorname{sen}(\pi(1+\lambda)) + (1+\lambda)\operatorname{sen}(\pi(1-\lambda))}{1-\lambda^2}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a\cos b + \cos a \operatorname{sen}b}}{=} \frac{1}{1-\lambda^2}\left[-(1-\lambda)\operatorname{sen}\pi\lambda - (1+\lambda)\operatorname{sen}(-\pi\lambda)\right] = \frac{1}{1-\lambda^2}2\lambda\operatorname{sen}\pi\lambda = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\operatorname{sen}\pi\lambda.$$

LUEGO $\widehat{f * g}(s) = \hat{f}(s)\,\hat{g}(s) =$

$$= \frac{2i}{s}\left[\pi \cos s\pi - \frac{\operatorname{sen} s\pi}{s}\right] \cdot \frac{2s}{1-s^2} \operatorname{sen} s\pi =$$

$$= \frac{4}{1-s^2}\, i \left[\pi \cos s\pi \operatorname{sen} s\pi - \frac{\operatorname{sen}^2 s\pi}{s}\right] =$$

$$= \frac{4}{1-s^2}\, i \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} 2s\pi - \frac{\operatorname{sen}^2 s\pi}{s}\right]$$

3:

$$\begin{cases} 2x'(t) + y(t) = 1 \\ x(t) + 2y'(t) = t \\ x(0)=0 \quad y \quad y(0)=1 \end{cases}$$

APLICANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A LAS DOS ECUACIONES DEL SISTEMA

$$\mathcal{L}\,(2x'(t) + y(t))\,(s) = \mathcal{L}(1)\,(s)$$
$$\mathcal{L}\,(x(t) + 2y'(t))\,(s) = \mathcal{L}(t)\,(s)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2s\mathcal{L}x(s) + \mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s}$$
$$\mathcal{L}x(s) + 2\,(s\mathcal{L}y(s) - y(0)) = 1/s^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} 2s\,\mathcal{L}x(s) + \mathcal{L}y(s) = 1/s \\ \mathcal{L}x(s) + 2s\mathcal{L}y(s) = 1/s^2 + 2 \end{array}$$

ESTE ES UN SISTEMA LINEAL CON DETERMINANTE

$$\begin{vmatrix} 2s & 1 \\ 1 & 2s \end{vmatrix} = 4s^2 - 1$$

, LUEGO APLICANDO LA REGLA DE CRAMER LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ES

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{4s^2-1}\begin{vmatrix} 1/s & 1 \\ 1/s^2+2 & 2s \end{vmatrix} = \frac{2 - 1/s^2 - 2}{4s^2-1} = \frac{-1}{s^2(4s^2-1)} =$$

$$= \frac{-1}{s^2(2s-1)(2s+1)}$$

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{4s^2-1}\begin{vmatrix} 2s & 1/s \\ 1 & 1/s^2+2 \end{vmatrix} = \frac{2/s + 4s - 1/s}{4s^2-1} = \frac{1/s + 4s}{4s^2-1} =$$

$$= \frac{1+4s^2}{s(4s^2-1)} = \frac{1+4s^2}{s(2s+1)(2s-1)}$$

AHORA RESOLVEMOS EL PROBLEMA INVERSO;

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{2s+1} + \frac{D}{2s-1} = \frac{-1}{s^2(4s^2-1)}$$

ASÍ $A\,s(4s^2-1) + B(4s^2-1) + C\,s^2(2s-1) + D\,s^2(2s+1) =$

$$= 4s^3A - sA + 4Bs^2 - B + 2s^3C - s^2C + 2s^3D + s^2D = -1$$

LUEGO

$$-B = -1 \quad \Rightarrow B = 1$$
$$-A = 0 \quad \Rightarrow A = 0$$
$$4B - C + D = 0$$
$$4A + 2C + 2D = 0 \quad \Rightarrow C = -D$$

$4 + 2D = 0 \Rightarrow D = -2$

$y\ C = 2$

PODEMOS ESCRIBIR

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{2s+1} - \frac{2}{2s-1} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1/2} - \frac{1}{s-1/2}$$ Y MIRANDO

LAS TABLAS TENEMOS QUE

$$\boxed{x(t) = t + e^{-1/2\,t} - e^{1/2\,t}}$$

AHORA $$\mathcal{L}y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{2s+1} + \frac{C}{2s-1} = \frac{1+4s^2}{s(2s+1)(2s-1)}$$

ASÍ $$A(4s^2-1) + s(2s-1)B + s(2s+1)C =$$

$$= 4s^2A - A + 2s^2B - sB + 2s^2C + sC = 1 + 4s^2$$

Y POR TANTO

$$-A = 1 \qquad A = -1$$

$$-B + C = 0 \qquad B = C$$

$$4A + 2B + 2C = 4 \qquad -4 + 4B = 4$$

$$B = 2 = C$$

PODEMOS ESCRIBIR

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{-1}{s} + \frac{2}{2s+1} + \frac{2}{2s-1} = -1/s + \frac{1}{s+1/2} + \frac{1}{s-1/2}$$

Y MIRANDO LAS TABLAS SE TIENE QUE

$$\boxed{y(t) = -1 + e^{-1/2\,t} + e^{1/2\,t}}$$

COMPROBACIÓN: OBSERVEMOS QUE

$$x(0) = 0 + 1 - 1 = 0$$

Y $y(0) = -1 + 1 + 1 = 1$ LUEGO LAS SOLUCIONES OBTENIDAS AL MENOS VERIFICAN LAS CONDICIONES INICIALES

ADEMÁS

$$2x'(t) + y(t) = 2 - e^{-1/2\,t} - e^{1/2\,t} + \left(-1 + e^{-1/2\,t} + e^{1/2\,t}\right) = 1$$

$$x(t) + 2y'(t) = t + e^{-1/2\,t} - e^{1/2\,t} - e^{-1/2\,t} + e^{1/2\,t} = t.$$

4º

$$\left.\begin{array}{lll} x \equiv 1 & \bmod 3 \\ x \equiv 7 & \bmod 10 \\ 2x \equiv 3 & \bmod 7 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ 2 \cdot 4 \equiv 1 \quad \bmod 7 \end{array}$$

$x \equiv 1 \quad \bmod 3$

$x \equiv 7 \quad \bmod 10$

$x \equiv 3 \times 4 \equiv 5 \quad \bmod 7.$

APLICANDO EL TEOREMA CHINO DEL RESTO.

NECESITAMOS CALCULAR

$(10 \times 7)^{-1} \in (\mathbb{Z}_3{}^\times)$

$70 \equiv 1 \quad \bmod 3$, LUEGO $(10 \times 7)^{-1} = 10 \times 7 \equiv 1 \quad \bmod 3$

$(3 \times 7)^{-1} \in (\mathbb{Z}_{10}{}^\times)$

$3 \times 7 = 21 \equiv 1 \quad \bmod 10$ LUEGO $(3 \times 7)^{-1} = 3 \times 7 \equiv 1 \bmod 10$

Y $(3 \times 10)^{-1} \in (\mathbb{Z}_7{}^\times)$

$30 \equiv 2 \quad \bmod 7$ LUEGO $(30)^{-1} \equiv 4 \quad \bmod 7.$

ASÍ $x = 1 \times 70 \times 1 + 7 \times 21 \times 1 + 5 \times 30 \times 4 =$

$= 70 + 147 + 600 = 817.$

O CUALQUIER OTRO CONGRUENTE CON 817 mod. $7 \times 10 \times 3 = 210$

COMO $817 \,\underline{|\,210}$; 187, 3

$x \equiv 187 \quad \bmod 210.$

COMPROBACIÓN: $187 \,\underline{|\,3}$: 07, 1; 62 $\qquad$ $187 \,\underline{|\,7}$: 47, 5; 26 $\qquad$ $187 \,\underline{|\,10}$: 87, 7; 18

5:

a) El elemento $7 \in \mathbb{Z}_{28}$ tiene orden 4;

$$\{7,\ 7+7,\ 7+7+7,\ 7+7+7+7\} =$$

$$= \{7,\ 14,\ 21,\ 0\}$$ es un subgrupo de orden 4 del grupo $(\mathbb{Z}_{28}, +)$

Así el elemento $(4,0) \in \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3$ es un elemento de orden 4 en $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3$ y el subgrupo que genera es de orden 4

$$\{(7,0),\ (14,0),\ (21,0),\ (0,0)\}.$$

b) $|\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3| = 28 \cdot 3 = 4 \cdot 7 \cdot 3 = 2^2 \cdot 7 \cdot 3.$

Como 5 no divide a $28 \cdot 3$, el teorema de Lagrange nos dice que $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3$ $\underline{\underline{\text{no}}}$ tiene subgrupos de orden 5.

6: $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ como es un polinomio de orden 3 y $f(0) = 1 \neq 0$ y $f(1) = 1 \neq 0$, es decir no tiene raíces en $\mathbb{Z}_2$ es irreducible.

a) Por tanto $\mathbb{Z}_2[x]/f$ es un cuerpo de cardinal

$$|\mathbb{Z}_2[x]/f| = 2^{\text{grad} f} = 2^3 = 8.$$

La característica de $\mathbb{Z}_2$ es 2, por tanto la de $\mathbb{Z}_2[x]$ y $\mathbb{Z}_2[x]/f$ también es 2.

b) $\mathbb{F}^* = \mathbb{Z}_2[x]/f \setminus \{0\}$ es un grupo multiplicativo, cíclico de 7 elementos; como 7 es primo, todo elemento de $\mathbb{F}^*$ menos el 1 es un generador. En particular $[x]$ y $[x]+1$ son generadores de $\mathbb{F}^*$

c) SE PUEDE HACER ESTE APARTADO CALCULANDO LA TABLA DE MULTIPLICAR DE $\mathbb{F}^*$ (SOLO TIENE 7 ELEMENTOS) Y BUSCAR EN ELLA $[x]^{-1}$ Y $\sqrt{[x]}$.

DE FORMA MÁS BREVE

$0 = [x^3 + x + 1] = [x]^3 + [x] + 1$ ASÍ

$-1 = 1 = [x]^3 + [x] = ([x]^2 + 1)[x]$.

$$\boxed{\text{LUEGO } [x]^2 + 1 = [x]^{-1}}$$

PARA CALCULAR $\sqrt{[x]}$ NECESITAMOS ENCONTRAR

$y \in \mathbb{F}^* = \{1, [x], [x]+1, [x]^2, [x]^2+1, [x]^2+[x], [x]^2+[x]+1\}$

DE MODO QUE $y^2 = [x]$

COMO ESTAMOS EN CUERPOS DE CARACTERÍSTICA 2.

SI $y^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2$.

TOMEMOS $y = [x]^2 + [x]$

$y^2 = ([x]^2 + [x])^2 = [x]^4 + [x]^2 = [x]([x]^3 + [x]) =$

$= [x](-1) = [x]$.

(YA QUE $[x]^3 + [x] + [1] = 0$)

ASÍ $\sqrt{[x]} = [x]^2 + [x]$..