EXAMEN FINAL: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

3 de Febrero de 2016

1.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $f_n(x) = 3 + \dfrac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n}$

2.- Calcula la serie de Fourier de la función $f(t) = \cos(3t + \frac{\pi}{4})$, $t \in [-\pi, \pi]$.

3.- Se sabe que $K_1e^{3t} + K_2te^{3t} + 2t + 1$ es la solución general de la E.D.O.

$$x'' + a_1x' + a_2x = At + B.$$

Encuentra los valores de a_1, a_2, A y B.

4.- a) Calcula el resto de dividir 3^{2016} por 14.

b) Muestra que para todo entero a tal que $0 < a < 17$, el resto de dividir a^{2016} por 17 es siempre el mismo.

5.- a) ¿Es posible obtener un isomorfismo de $(\mathbb{Z}_8^*, \times)$ sobre $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$? Razona la respuesta.

b) Determina si el polinomio $p = x^5 + 2x^4 + 2x + 1$ tiene raíces múltiples en $\mathbb{Z}_7$.

6.- Considera los polinomios $p\,(x) = x^2 - x - 1$ y $q\,(x) = x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]$.

a) Determina si $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle p\rangle$ ó $\mathbb{K}_2 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle q\rangle$ forman un cuerpo

b) Halla, si es posible, $[x]^{-1}$ en $\mathbb{K}_1$ y en $\mathbb{K}_2$.

La revisión del examen se efectuará el día 10 de febrero a las 16:15 horas en el aula 13. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

1:) $f_n(x) = 3 + \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$

Observemos que $\operatorname{Dom} f_n = \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

a) Límite puntual.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 3 + \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = 3 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Convergencia uniforme.

$$|f_n(x) - f(x)| \underset{\substack{\downarrow \\ f \text{ límite puntual}}}{=} \left| 3 + \frac{\operatorname{sen} nx}{n} - 3 \right| = \left| \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right| \le$$

$$\underset{\substack{|\operatorname{sen} y| \le 1 \\ \forall y \in \mathbb{R}}}{\le} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{independientemente de } x$$

Luego $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $f(x) = 3$ en todo $\mathbb{R}$.

2:) Sea $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{4})$.

f tiene periodo $\frac{2\pi}{3}$ (ya que $f(x + \frac{2\pi}{3}) =$

$= \cos(3x + \frac{\pi}{4} + 2\pi) = \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = f(x)$.

Luego f tiene una frecuencia $\frac{3}{2\pi}$ única.

Luego su serie de Fourier se reduce a $a_3 \cos 3x + b_3 \operatorname{sen} 3x$. Efectivamente, usando la fórmula trigonométrica $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

$$f(x) = \cos(3x + \tfrac{\pi}{4}) = \cos 3x \cdot \cos \tfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{4} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} 3x}$$

serie de Fourier de la función.

3:

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = At + B$$

ES UNA E.D.O LINEAL DE 2º ORDEN NO HOMOGÉNEA. SI SU SOLUCIÓN GENERAL ES

$$x(t) = k_1 e^{3t} + k_2 t e^{3t} + 2t + 1$$

AQUÍ VEMOS QUE $k_1 e^{3t} + k_2 t e^{3t}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ES LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$

Y VEMOS QUE $\lambda = 3$ ES RAÍZ DOBLE DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

Y POR TANTO $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - 3)^2$

ASÍ $\boxed{a_1 = -6}$ Y $\boxed{a_2 = 9}$

NUESTRA EDO ES $x'' - 6x' + 9x = At + B$

Y DE LA SOLUCIÓN GENERAL SABEMOS QUE

$y(t) = 2t + 1$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O (PARA $k_1 = k_2 = 0$ SALE y)

ASÍ
$$y(t) = 2t + 1$$
$$y'(t) = 2$$
$$y''(t) = 0$$

ENTRANDO CON ESTA SOLUCIÓN EN LA ECUACIÓN

$$-6 \cdot 2 + 9(2t+1) = At + B$$

$$\Leftrightarrow \quad -12 + 18t + 9 = 18t - 3 = At + B$$

POR TANTO $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{A = 18} \\ \text{Y} \\ \boxed{B = -3} \end{array} \right.$

4) a) $3^{2016} \underline{\lfloor 14}$

$\quad r \qquad c$

BUSCAMOS $3^{2016} \equiv r \mod 14$

O LO QUE ES LO MISMO, DETERMINAR

3^{2016} EN $\mathbb{Z}_{14}$ QUE ES UN ANILLO.

COMO $m.c.d(3, 14) = 1$ YA QUE $14 = 2 \times 7$

EL TEOREMA DE EULER NOS DICE QUE

$$3^{\varphi(14)} \equiv 1 \mod 14$$

AHORA $\varphi(14) = \varphi(2 \times 7) = \varphi(2)\varphi(7) = 1 \times 6 = 6.$

LUEGO $3^{6} \equiv 1 \mod 14$

DIVIDIENDO

$$\begin{array}{l|l} 2016 & 6 \\ \hline 21 & 336 \\ \ \ 36 & \\ \ \ \ 0 & \end{array}$$

LUEGO $3^{2016} = 3^{6 \times (336)} = (3^{6})^{336} \equiv 1^{336} \mod 14$

LUEGO $3^{2016} \equiv 1 \mod 14$

b) SI TOMAMOS $a \in \mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}$, COMO 17 ES PRIMO

$(\mathbb{Z}_{17}^{*}, \times)$ ES UN GRUPO MULTIPLICATIVO DE ORDEN 16,

LUEGO $\forall a \in \mathbb{Z}_{17}^{*} \quad a^{16} \equiv 1 \mod 17.$

(TAMBIÉN PODEMOS USAR EL TEOREMA DE EULER, Y ASÍ $a^{\varphi(17)} \equiv 1 \mod 17$

SI $0 < a < 17$, $m.c.d(a, 17) = 1$

SIENDO $\varphi(17) = 16.$).

AHORA

$$\begin{array}{l|l} 2016 & 16 \\ \hline 41 & 126 \\ \ \ 96 & \\ \ \ 00 & \end{array}$$

; ASÍ $a^{2016} = (a^{16})^{126} \equiv 1 \mod 17.$

5) a) $(\mathbb{Z}_8^* \times) = (\{1, 3, 5, 7\} \times)$

GRUPO CONMUTATIVO DE LAS UNIDADES DE $\mathbb{Z}_8$

EL ORDEN DE $\mathbb{Z}_8^*$ ES 4

CADA ELEMENTO $a \in \mathbb{Z}_8^*$ $a \neq 1$, TIENE ORDEN 2 (CLARO

$$3^2 = 9 \equiv 1 \mod 8$$
$$5^2 = 25 \equiv 1 \quad " \ "$$
$$7^2 = 49 \equiv 1 \mod 8 \quad)$$

COMO GRUPOS CONMUTATIVOS DE ORDEN 4 SOLO HAY DE DOS TIPOS $(\mathbb{Z}_4 +)$ (QUE ES CÍCLICO) Y $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 +)$,

COMO $(\mathbb{Z}_8^* \times)$ NO ES CÍCLICO CONCLUIMOS QUE: ISOMORFO A $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 +)$

SI, $(\mathbb{Z}_8^* \times)$ TIENE QUE SER

b) $p = x^5 + 2x^4 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$.

$p' = 5x^4 + x^3 + 2 \in \mathbb{Z}_7[x]$

CALCULAMOS EL m.c.d (p, p'). USANDO EL ALGORITMO DE EUCLIDES

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 2x^4 + \quad + 2x + 1 & 5x^4 + x^3 + 2 \\ \underline{-x^5 + 4x^4 + \quad x} & 3x + 4 \\ 0 \quad 6x^4 \quad + 3x + 1 & \\ \underline{\quad -6x^4 + 3x^3 \quad -1} & \\ \quad 3x^3 + 3x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 5x^4 + x^3 + 2 & 3x^3 + 3x \\ \underline{-5x^4 \quad 2x^2} & 4x + 5. \\ x^3 + 2x^2 + 2 & \\ \underline{-x^3 \quad 2x} & \\ 2x^2 + 2x + 2. & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 3x & 2x^2 + 2x + 2 \\ \underline{-3x^3 - 4x^2 - 3x} & 5x + 2 \\ 4x^2 & \\ \underline{-4x^2 + 3x + 3} & \\ 3x + 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + 2x + 2 & 3x + 3 \\ \underline{-2x^2 - 2x} & 3x \\ 2 & \end{array}$$

LUEGO m.c.d $(p, p') = 2$; LO QUE NOS DICE QUE p NO TIENE RAÍCES MÚLTIPLES EN $\mathbb{Z}_7$ O EN CUALQUIER EXTENSIÓN DE $\mathbb{Z}_7$

6º a) $p(x) = x^2 - x - 1 = x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$

$q(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$

q es de grado dos y $x = 1 \in \mathbb{Z}_3$ es una raíz, por tanto q no es irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$.

Luego $\mathbb{Z}_3[x]/q$ es un anillo conmutativo con unidad, pero no es un dominio de integridad. NO es un cuerpo.

p es de grado dos y $x=0$ ó $x=1$ ó $x=2$ son raíces de p, luego p es irreducible en $\mathbb{Z}_3$. Por lo tanto $\mathbb{Z}_3[x]/p$ es un cuerpo.

b) $m.c.d(x, x^2+2x+2) = 1$ luego $\exists [x]^{-1}$

$m.c.d(x, x^2+x+1) = ax + b$ si $a \neq 0$, necesariamente $b = 0$ ya que $-\frac{b}{a} \neq 0$ no es raíz de x; si se tiene pero como $x = 0$ no es raíz de x^2+x+1. Luego $a = 0$. que ax no divide a x^2+x+1 y $\exists [x]^{-1}$ en $\mathbb{Z}_3[x]/q$

Así $m.c.d(x, x^2+x+1) = 1$ y $\exists [x]^{-1}$ en $\mathbb{Z}_3[x]/q$ aunque no sea un cuerpo. En ambos casos usaremos el para hallar $[x]^{-1}$ algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{l|l} x^2+2x+2 & x \\ \underline{-x^2} & x+2 \\ \quad 2x+2 & \\ \quad \underline{-2x} & \\ \qquad 2 & \end{array}$$

Luego $x^2+2x+2 = x(x+2)+2$

$\Leftrightarrow 0 = x(x+2) + 2$

$\Leftrightarrow 1 = x(x+2)$

Luego $[x]^{-1} = x+2$ en $\mathbb{Z}_3[x]/_{x^2+2x+2}$.

En el otro caso

$0 = q(x) = x^2+x+1 = x(x+1)+1 \Rightarrow x(x+1) = 2$

luego $x(2x+2) = 1$ y así

$[x]^{-1} = 2x+2$ en $\mathbb{Z}_3[x]/_{x^2+x+1}$.