AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen de Febrero; VII-Febrero-2012

1.- Calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $x \in (-\pi, \pi)$. Usa lo anterior para comprobar que

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}.$$

2.- Calcula la transformada de Fourier de la función $f(t) = tx(t)$ siendo

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ -e^{at} & t < 0 \end{cases}$$

y a un número real positivo.

3.- Resuelve el siguiente problema de valor inicial usando la Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

4.- Resuelve el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ 2x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

5.- Calcular el resto obtenido al dividir 125^{4577} entre 13.

6.- Se considera el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 2x + 4)$. Sea $\alpha = [x] \in \mathbb{F}$. Calcula el inverso del elemento $\alpha^{73} + \alpha^2 + \alpha + 2$ en $\mathbb{F}$.

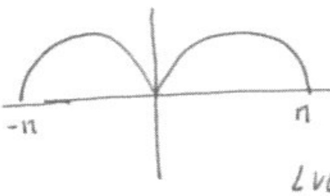
Observaciones:

.- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.

.- Cada pregunta se puntua con un máximo de 1,5 puntos.

.- La **revisión del examen** será el próximo martes 14 de Febrero a las 14h en el aula 7.

PROBLEMA 1:] LA FUNCIÓN $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ $\quad x \in (-\pi,\pi)$.



ES UNA FUNCIÓN PAR

$$f(-x) = |\operatorname{sen} -x| = |-\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} x| = f(x).$$

LUEGO AL CALCULAR SUS COEFICIENTES DE FOURIER

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x| \operatorname{sen} nx \, dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x| \, dx \underset{f \text{ PAR}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{\pi}\cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x| \cos nx \, dx \underset{f \text{ PAR}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx \, dx$$

AHORA $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx \, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos x \operatorname{sen} nx \, dx =$

$$= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos x \cdot \operatorname{sen} nx \, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \cos x \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx \, dx$$

DESPEJANDO $\displaystyle\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2}\left(\cos\pi \cos n\pi - 1\right) = \frac{1}{n^2}\left((-1)^{n+1} - 1\right).$

ASÍ $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx \, dx = \frac{1}{1-n^2}\left((-1)^{n+1} - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \\ \frac{-2}{1-n^2} & n \text{ ES PAR} \end{cases}$

ERRADO

n ES IMPAR

LUEGO $\displaystyle a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-n^2}\left((-1)^{n+1} - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{SI} \\ \frac{-4}{\pi(1-n^2)} & \text{SI } n \text{ ES PAR} \end{cases}$

LUEGO LA SERIE DE FOURIER DE f ES.

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(1-4k^2)} \cos 2kx.$$

COMO $|\operatorname{sen} x|$ ES 2π-PERIÓDICA Y CONTINUA EN $[-\pi,\pi]$; f TIENE DERIVADAS LATERALES EN $(-\pi,\pi)$ CON $f(u^+) = f(u^-)$

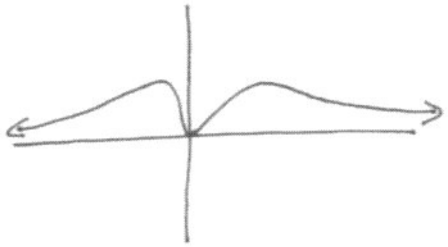
SE TIENE QUE $\forall x \in (-\pi,\pi)$.

$$|\operatorname{sen} x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kx$$

PARA $x = 0$ $\qquad \displaystyle 0 = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)(2k-1)}.$

DESPEJANDO $\displaystyle\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}.$

PROBLEMA 2: $f(t) = t\,x(t) = \begin{cases} t e^{-at} & t>0 \\ -t e^{at} & t<0 \end{cases}$



$$f(-t) = \begin{cases} t e^{-at} & t>0 \\ -t e^{at} & t<0 \end{cases} = f(t).$$

LUEGO f ES UNA FUNCIÓN PAR.

LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE f

ES $$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st \, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} st \, dt.$$

POR SER f PAR $f(t) \operatorname{sen} st$ ES IMPAR Y ASI

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} st \, dt = 0$$

LUEGO $$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st \, dt =$$

$f(t) \cos st$ PAR

$$= 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos st \, dt = 2 \int_0^{\infty} t e^{-at} \cos st \, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\infty} t \, e^{-at} \left(\frac{e^{ist} + e^{-ist}}{2} \right) dt$$

$$= \int_0^{\infty} t \, e^{-(a-is)t} dt + \int_0^{\infty} t \, e^{-(a+is)t} dt \underset{\text{POR PARTES}}{=}$$

$$= t \frac{e^{-(a-is)t}}{-(a-is)} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a-is)t}}{a-is} dt + \frac{t\, e^{-(a+is)t}}{-(a+is)} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a+is)t}}{(a+is)} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a-is)t}}{(a-is)} dt + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a+is)t}}{(a+is)} dt =$$

$$= \frac{e^{-(a-is)t}}{-(a-is)^2} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{-(a+is)t}}{-(a+is)^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(a-is)^2} + \frac{1}{(a+is)^2} =$$

$$= \frac{(a+is)^2 + (a-is)^2}{(a-is)^2 (a+is)^2} = \frac{2(a^2 - s^2)}{((a-is)(a+is))^2} = \frac{2(a^2 - s^2)}{(a^2+s^2)^2}$$

PROBLEMA 3:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$
$$\left\{ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \right.$$

APLICANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$\mathcal{L}(y'' - 3y' + 2y)(s) = \mathcal{L}(e^{3x})(s)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}y''(s) - 3\mathcal{L}y'(s) + 2\mathcal{L}y(s) =$$

$$= s^2 \mathcal{L}y(s) - sy(0) - 3(s\mathcal{L}y(s) - 1) + 2\mathcal{L}y(s) =$$

$$= \mathcal{L}(e^{3x})(s) = \frac{1}{s-3}$$

LUEGO $(s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}y(s) - s + 3 = \frac{1}{s-3}$

ASI $\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}\left[s - 3 + \frac{1}{s-3}\right] =$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-2)}\left[\frac{(s-3)^2+1}{s-3}\right] =$$

$$= \frac{s^2-6s+10}{(s-1)(s-2)(s-3)} \underset{\downarrow}{=} \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

ASI $A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2) =$
$AS^2 - 5SA + 6A + BS^2 - 4SB + 3B + CS^2 - 3SC + 2C = S^2 - 6S + 10$

LUEGO
$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ -5A - 4B - 3C &= -6 \\ 6A + 3B + 2C &= 10 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ B + 2C &= -1 \\ -3B - 4C &= 4 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ B+2C &= -1 \\ 2C &= 1 \end{aligned}$$

LUEGO $C = 1/2$, $B = -2$ Y $A = 5/2$

LUEGO $\mathcal{L}y(s) = \frac{5/2}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1/2}{s-3}$

BUSCANDO EN LA TABLA LAS ANTITRANSFORMADAS DE LAPLACE RESULTA QUE

$$y(x) = 5/2\, e^{x} - 2e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

PROBLEMA 4: EL SISTEMA DE CONGRUENCIAS

$$\left\{\begin{array}{ll} x \equiv 3 & \mod 5 \\ 2x \equiv 1 & \mod 3 \\ x \equiv 4 & \mod 11 \end{array}\right. \underset{\substack{2^{-1}\equiv 2 \\ \mod 3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} x \equiv 3 & \mod 5 \\ x \equiv 2 & \mod 3 \\ x \equiv 4 & \mod 11 \end{array}\right.$$

EL TEOREMA CHINO DEL RESTO NOS DA LA SOLUCIÓN DE ESTE SISTEMA DE CONGRUENCIAS YA QUE 5, 3 Y 11 SON PRIMOS ENTRE SI (ALGO MÁS SON TRES NÚMEROS PRIMOS).

HAY QUE ENCONTRAR q_1, q_2 Y q_3 CON

$$q_1 \cdot 33 \equiv 1 \mod 5$$
$$q_2 * 55 \equiv 1 \mod 3$$
$$\text{Y } q_3 * 15 \equiv 1 \mod 11$$

Y EL x BUSCADO SERÁ $x = 3q_1 * 33 + 2q_2 * 55 + 4q_3 * 15$

O CUALQUIER OTRO $y \equiv x \mod 5*3*11 = 165$.

$m.c.d(5,33)=1$ BUSQUEMOS UNA IDENTIDAD DE BEZOUT.

$$\begin{array}{r|l} 33 & 5 \\ \hline 3 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

r	q	α	β
33		1	0
5		0	1
3	6	1	-6
2	1	-1	7
1	1	2	-13

ASÍ $2*33 - 13*5 = 1$

Y EL q_1 BUSCADO ES 2

$m.c.d(55,3)=1$ LUEGO $55 \equiv 1 \mod 3$.

$$\begin{array}{r|l} 55 & 3 \\ \hline 25 & 18 \\ 1 & \end{array}$$

$55 - 18*3 = 1$ Y ASÍ $q_2 = 1$

$m.c.d(15,11)=1$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 11 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

r	q	α	β
15		1	0
11		0	1
4	1	1	-1
3	2	-2	3
1	1	3	-4

LUEGO $3*15 - 4*11 = 1$

ASÍ q_3 ES 3

LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ES $x = 3*2*33 + 2*1*55 + 4*3*15 = 198 + 110 + 180 = 488$

COMO $\begin{array}{r|l} 488 & 165 \\ \hline 158 & 2 \end{array}$ $488 \equiv 158 \mod 165$ LUEGO 158 ES EL NATURAL MÁS PEQUEÑO QUE CUMPLE EL SISTEMA

PROBLEMA 5:) 125^{4577}

m.c.d $(125, 13) = 1$ (13 ES PRIMO). LA FUNCIÓN DE EULER SOBRE 13, $\Phi(13) = 12$

POR EL TEOREMA DE EULER SI m.c.d$(a,b) = 1 \Rightarrow$
$$a^{\Phi(b)} \equiv 1 \mod b.$$

POR EL CALCULO DE CONGRUENCIAS.

SI $125^{4577} = k \times 13 + r$ $\quad r < 13$ (RESTO).

ENTONCES $125^{4577} \equiv r \mod 13$

POR OTRA PARTE
$$\begin{array}{l|l} 4577 & 12 \\ \hline 097 & 381 \\ \ \ 017 & \\ \ \ \ \ 5 & \end{array}$$

LUEGO $125^{4577} = 125^{12 \times 381 + 5} =$
$$= (125^{12})^{381} \cdot 125^5 \equiv 125^5 \mod 13.$$
YA QUE $125^{12} \equiv 1 \mod 13.$

POR OTRO LADO $125^5 = (5^3)^5 = 5^{15} = 5^{12+3} \equiv 5^3 \mod 13$

$5^3 = 125$
$$\begin{array}{l|l} 125 & 13 \\ \hline 08 & 9 \end{array}$$
LUEGO $125 \equiv 8 \mod 13$

ASI $125^{4577} \equiv 125^5 \equiv 125 \equiv 8 \mod 13$

POR TANTO EL r BUSCADO ES $\underline{\underline{8}}$

PROBLEMA 6:) $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[x]/_{x^2+2x+4}$ ES UN CUERPO, YA QUE x^2+2x+4 ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Z}_5[x]$ ($x = 0, 1, 2, 3$ ó 4 NO SON RAICES DEL POLINOMIO, COMO SE COMPRUEBA TRIVIALMENTE) ASI Card $\mathbb{F} = 5^2 = 25$ y $(\mathbb{F}^* \times)$ ES UN GRUPO CICLICO DE ORDEN 24;
$\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{F}^*$ y $\alpha^{73} = \alpha^{3 \cdot 24 + 1} = \alpha$ EN $(\mathbb{F}^* \times)$

ASI $\alpha^{73} + \alpha^2 + \alpha + 2 = \alpha + \alpha^2 + \alpha + 2 = \alpha^2 + 2\alpha + 4 - 2$

COMO $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$ EN $\mathbb{F}$, SE TIENE QUE
$\alpha^{73} + \alpha^2 + \alpha + 2 = -2$ EN $\mathbb{F}$ EL INVERSO DE $-2 \in \mathbb{Z}_5$
ES $\underline{\underline{2}}$