EXAMEN FINAL: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

24 de enero de 2017

1.- Estudia la convergencia puntual y uniforme en los intervalos $x \in [0, a]$ y $x \in [a, \pi/2]$, donde $a \in (0, \pi/2)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$.

2.- Sea $S(x)$ la serie de Fourier de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ en el intervalo $[-1, 1]$. Calcula $S(0)$ y $S(1)$.

3.- Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales con valores iniciales:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & + & 3y(t) & + & 1 \\ y'(t) & = & & - & y(t) & + & e^t \\ x(0) & = & y(0) & = & 0 & & \end{array}$$

Indicación: Se recomienda usar una de las siguientes maneras de resolverlo:

A) Resuelve por orden la segunda ecuación y con el resultado obtenido calcula la función x. O bien

B) Aplica la transformada de Laplace a ambas ecuaciones, resuelve el sistema lineal y aborda el problema inverso.

4.- Estudia la existencia de solución y resuelve, si es posible:

$$\left.\begin{array}{rcrl} x & \equiv & 7 & \bmod 9 \\ 4x & \equiv & 11 & \bmod 5 \\ 3x & \equiv & 3 & \bmod 8 \end{array}\right\}$$

5.- Calcula el orden de $(5, 12)$ en $G = (\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{33}, +)$. ¿Existe algún elemento en G de orden 198? Justifica la respuesta.

6.- En el cuerpo $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - 2)$ resuelve la ecuación

$$\alpha^{51} y + 3\alpha + 1 = 0,$$

donde $\alpha = [x]$ e y es la incógnita.

La revisión del examen se efectuará el día 7 de febrero a las 15 horas en el aula 13. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

PROBLEMA 1: Tenemos la sucesión

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x \qquad x \in [0, \pi/2].$$

LÍMITE PUNTUAL

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ó } x = \pi/2 \quad (\operatorname{sen} 0 = 0) \quad (\cos \pi/2 = 0) \\ \text{ó} & \\ 0 & \text{si } x \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

ya que si $x \in (0, \pi/2)$, $\operatorname{sen} x \neq 0$ y $\cos x \in (0,1)$.

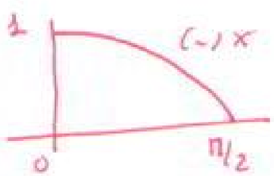
y además. $\lim_{n\to\infty} a n b^n = 0$ para $a \neq 0$ y $b \in (0,1)$.

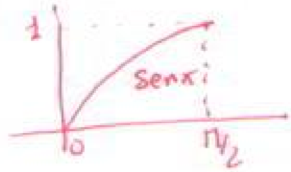
[Recordemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a n b^n < \infty$; como se ve usando el criterio del cociente $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1) b^{n+1}}{a n b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} b = b < 1$.

Por tanto $a n b^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$].

El límite puntual, es la función nula.

LÍMITE UNIFORME Vamos a representar la función $f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$ $\quad x \in [0, \pi/2]$



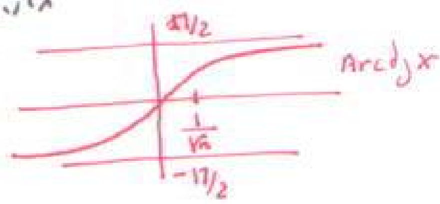


- $f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2]$
- $f_n(0) = f_n(\pi/2) = 0$
- Además $f_n'(x) = n\left[-n(\cos x)^{n-1} \operatorname{sen}^2 x + (\cos x)^{n+1}\right] =$

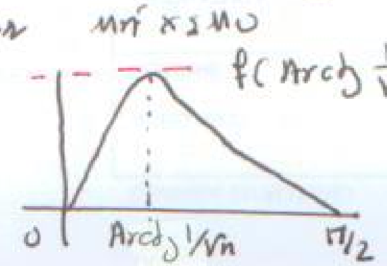
$$= n(\cos x)^{n-1}\left[\cos^2 x - n \operatorname{sen}^2 x\right]$$

$$f_n'(x) = 0 \iff \begin{cases} x = \pi/2 \\ \text{ó} \\ \cos^2 x - n \operatorname{sen}^2 x = 0 \iff \frac{1}{n} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \iff \frac{1}{\sqrt{n}} = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Luego $x = \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$



Luego f_n crece en $[0, \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}]$ y decrece en $[\operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{\pi}{2}]$, en $x = \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ tiene un máximo



$$f(\operatorname{Arctg} \tfrac{1}{\sqrt{n}}) = n\left(\cos(\operatorname{Arctg} \tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)^n \operatorname{sen}(\operatorname{Arctg} \tfrac{1}{\sqrt{n}}) =$$

$$= n\left(\cos(\operatorname{Arctg} \tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)^{n+1} \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} \tfrac{1}{\sqrt{n}})$$

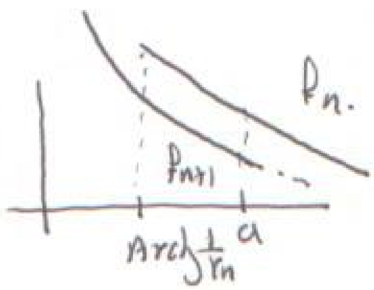
$$= \frac{n}{\sqrt{n}}\left(\cos(\operatorname{Arctg} \tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)^{n+1} = \sqrt{n}\left(\cos(\operatorname{Arctg} \tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)^{n+1}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\boxed{\text{CONVERGENCIA EN } [a, \pi/2]}$ si $0 < a < \pi/2$

Para n suficientemente grande

$$\operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{n}} < a$$



$$|0 - f_n(x)| \le f_n(a) =$$

f_n decreciente en $[a, \pi/2]$

$$= n(\cos a)^n \operatorname{sen} a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Luego $f_n \to 0$ uniformemente en $[a, \pi/2]$.

$\boxed{\text{CONVERGENCIA EN } [0, a]}$

Tenemos que calcular

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\cos\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\cos\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2+1} = \infty$$

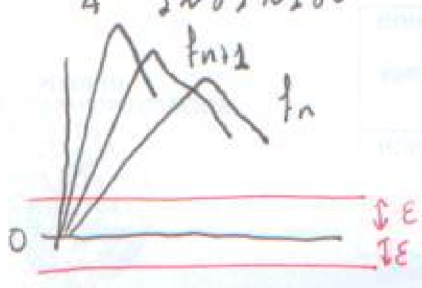
ya que $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2+1} = e^{-1/2}$ VER ABAJO.

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(\cos\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2+1}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\cos\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x^2+1}} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\right)}\left(-\operatorname{sen}\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2}{-2x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{2}\,\frac{x^2+1}{x^2} = -1/2$$

Así los máximos de las funciones $f_n(x)$ tienden a infinito cuando $n\to\infty$



y no es posible que $|0 - f_n(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in [0, a]$

Luego NO hay convergencia uniforme en $[0, a]$.

PROBLEMA 2: Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1 \quad \text{para } x \in [-1,1]$$

La función extendida de forma periódica.

Hagamos su gráfica

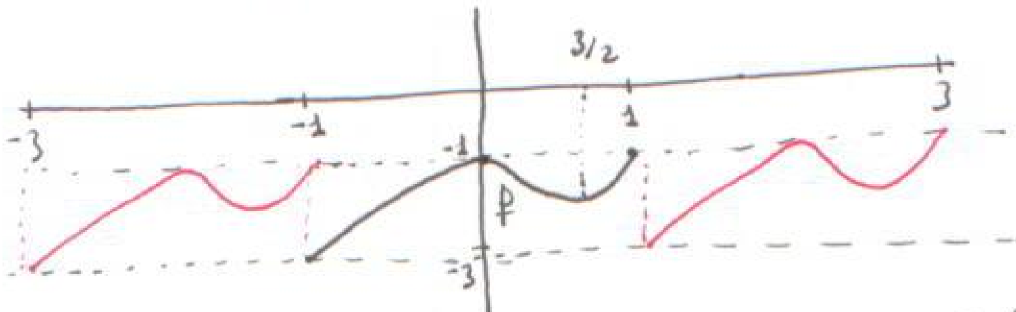
$f(-1) = -1 - 1 - 1 = -3$; $f(0) = -1$

$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2) \begin{cases} = 0 \iff x = 0 \text{ y } x = \frac{2}{3} \\ > 0 \text{ si } x < 0 \\ < 0 \text{ si } x \in (0, 2/3) \\ > 0 \text{ si } x > 2/3 \end{cases}$$

Así $x = 0$ es un máximo local

y $x = 3/2$ es un mínimo local



f es continua y derivable en $x \in (-1, 1)$

Así por los criterios de convergencia

$$S(x) = f(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$$

En particular.

$$\boxed{S(0) = f(0) = -1}$$

f no es continua en $x = 1$, pero existe $f'(1^-)$ y $f'(1^+)$

$f(1^-) = 1$ y $f(1^+) = -3$ y existe

por tanto por los criterios de convergencia

$$\boxed{S(1) = \frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2}$$

PROBLEMA 3: SI SEGUIMOS LA INDICACIÓN A)

CONSIDERAMOS LA E.D.O DE 1º ORDEN LINEAL

$$(*) \begin{cases} y'(t) = -y(t) + e^t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

PARA RESOLVERLA HACEMOS:

$y'(t) = -y(t)$ ECUACIÓN HOMOGÉNEA

SOLUCIÓN GENERAL $\boxed{y(t) = k e^{-t}}$ $k \in \mathbb{R}$

AHORA BUSCAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR $y_0(t) = k(t) e^{-t}$

DEL PROBLEMA $y'(t) = -y(t) + e^t$

ASÍ $y_0'(t) = k'(t) e^{-t} - \cancel{e^{-t} k(t)} = -\cancel{k(t) e^{-t}} + e^t$

DESPEJANDO $k'(t) = e^{2t}$

Y POR TANTO $\int k'(t)\,dt = \int e^{2t}\,dt = \frac{e^{2t}}{2} = k(t)$

LUEGO $\boxed{y_0(t) = \frac{e^{2t}}{2} e^{-t} = \frac{e^t}{2}}$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN ES

$$\boxed{y(t) = k e^{-t} + \frac{e^t}{2} \quad k \in \mathbb{R}.}$$

LA ÚNICA SOLUCIÓN QUE VERIFICA QUE $y(0)=0$

ES AQUELLA QUE $k + \frac{1}{2} = 0$ LUEGO $k = -1/2$

Y LA SOLUCIÓN DE (*) ES $\boxed{y(t) = -1/2\, e^{-t} + \frac{e^t}{2}}$

COMO YA CONOCEMOS A y VAMOS A CALCULAR x

PARA ELLO LA PRIMERA ECUACIÓN SE CONVIERTE EN

$$(**) \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3\left(-1/2\, e^{-t} + \frac{e^t}{2}\right) + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA DE CAUCHY PARA UNA E.D.O LINEAL

DE PRIMER ORDEN.

PARA RESOLVERLO PROCEDEMOS COMO ANTES

ECUACIÓN HOMOGÉNEA $x'(t) = 2x(t)$

ASÍ $\boxed{x(t) = ke^{2t} \quad k \in \mathbb{R}}$

BUSCAMOS AHORA UNA SOLUCIÓN PARTICULAR.

$$x_0(t) = k(t)e^{2t}.$$

ASÍ

$$x_0'(t) = k'(t)e^{2t} + \cancel{2k(t)e^{2t}} = \cancel{2k(t)e^{2t}} - 3/2\, e^{-t} + \tfrac{3}{2}e^{t} + 1$$

DESPEJANDO $k'(t) = -3/2\, e^{-3t} + 3/2\, e^{-t} + e^{-2t}.$

INTEGRANDO

$$k(t) = \int k'(t)\,dt = \int -3/2\, e^{-3t} + 3/2\, e^{-t} + e^{-2t}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-3t}}{2} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2}$$

LUEGO $\boxed{x_0(t)} = \left[\frac{e^{-3t}}{2} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2}\right]e^{2t} =$

$$= \boxed{\frac{e^{-t}}{2} - \frac{3}{2}e^{t} - 1/2}$$

Y LA SOLUCIÓN GENERAL DE (**) ES

$$\boxed{x(t) = ke^{2t} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{3}{2}e^{t} - 1/2}$$

LA ÚNICA SOLUCIÓN TAL QUE $x(0) = 0$

VERIFICA QUE $k + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1/2 = 0$

LUEGO $k = 3/2$

LA SOLUCIÓN BUSCADA ES

$$\boxed{x(t) = 3/2\, e^{2t} + \frac{e^{-t}}{2} - 3/2\, e^{t} - 1/2}$$

PROBLEMA 3: SI SEGUIMOS LA INDICACION B)

APLICAMOS LA TRANSFORMADA DE LAPLACE AL SISTEMA

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + 1 \\ y'(t) = -y(t) + e^t \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

ASI

$$L(x')(s) = L(2x + 3y + 1) = 2Lx(s) + 3Ly(s) + L(1)(s)$$

$$L(y')(s) = -Ly(s) + L(e^t)(s)$$

USANDO LA FORMULA DE LA TRANSFORMADA DE UNA DERIVADA

$$sLx(s) = 2Lx(s) + 3Ly(s) + \frac{1}{s}$$

$$sLy(s) = -Ly(s) + \frac{1}{s-1}$$

REORDENANDO

$$(s-2)Lx(s) - 3Ly(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s+1)Ly(s) = \frac{1}{s-1}$$

RESOLVEMOS ESTE SISTEMA DE INCOGNITAS Lx Y Ly

$$\boxed{Ly(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}} = \frac{-1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s-1}$$

Y ASI $(s-2)Lx(s) = 3\dfrac{1}{(s+1)(s-1)} + \dfrac{1}{s}$

POR TANTO

$$\boxed{Lx(s) = \frac{3}{(s-2)(s+1)(s-1)} + \frac{1}{s(s-2)}}$$

SOLUCIONES EN TRANSFORMADAS. HAY QUE RESOLVER LOS PROBLEMAS INVERSOS PARA ENCONTRAR x E y. BUSCANDO EN LAS TABLAS EN EL CASO DE y

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}}$$

EN EL CASO DE LA x HAY QUE HACER UN POCO MÁS DE TRABAJO Y $Lx(s) = \cancel{\dfrac{1}{s-2}} + \dfrac{1/2}{s+1} - \dfrac{3/2}{s-1} + \dfrac{1/2}{s-2} - \dfrac{1/2}{s}$

Y USANDO LAS TABLAS $\boxed{x(t) = \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}}$

PROBLEMA 4º

$$x \equiv 7 \mod 9$$
$$4x \equiv 11 \equiv 1 \mod 5$$
$$3x \equiv 3 \mod 8$$

EN $\mathbb{Z}_5$ $4^{-1} = 4$

EN $\mathbb{Z}_8$ COMO $mcd(3,8)=1$, EXISTE $3^{-1}=3$

LUEGO EL SISTEMA DE CONGRUENCIAS DE ARRIBA ES IGUAL A

$$x \equiv 7 \mod 9$$
$$x \equiv 4 \mod 5$$
$$x \equiv 1 \mod 8$$

COMO 9, 5 Y 8 NO TIENEN DIVISORES COMUNES EL TEOREMA DEL RESTO CHINO NOS DICE QUE EL SISTEMA TIENE SOLUCIÓN.

$x \equiv 7 \times 5 \times 8 \times 7$

$40 \times 7 \equiv 1 \mod 9$

$+ 4 \times 9 \times 8 \times 3$

$72 \times 3 \equiv 1 \mod 5$

$+ 1 \times 45 \times 5 = 49 \times 40 + 12 \times 72 + 225 \mod 9 \times 5 \times 8$

$45 \times 5 \equiv 1 \mod 8.$

$\Longleftrightarrow x \equiv 1960 + 864 + 225 \mod 360$

$\Longleftrightarrow x \equiv 3049 \mod 360$

$\Longleftrightarrow x \equiv 169 \mod 360.$

$3049 \div 360 = 8$, resto 169

COMPROBACIÓN

$169 \div 9 = 18$, resto 7

$169 \div 5 = 33$, resto 4

$169 \div 8 = 21$, resto 1.

PROBLEMA 5:

EL ORDEN DEL GRUPO $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{33}, +)$

ES $|\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{33}| = 6 \times 33 = 198.$

SI TUVIESE UN ELEMENTO DE ORDEN 198

SERÍA CÍCLICO Y ENTONCES

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{33} \simeq \mathbb{Z}_{198}$$

PERO ESTO NO ES POSIBLE YA QUE $m.c.d(6,33)=3.$

LUEGO NO EXISTE UN ELEMENTO GENERADOR DE

$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{33}.$

POR OTRO LADO $5 \in \mathbb{Z}_6$ Y COMO $m.c.d(5,6)=1$

EL ORDEN DE 5 EN $\mathbb{Z}_6$ ES 6.

ADEMAS $12 \in \mathbb{Z}_{33}$ Y $m.c.d(12,33)=3.$

LUEGO EL ORDEN DE 12 EN $\mathbb{Z}_{33}$

ES 11.

($1|33$ $3|33$ $11|33$ Y $33|33$

CLARAMENTE 1 Y 33 NO SON EL ORDEN DE 12.;

" TAMPOCO LO ES 3, LUEGO SOLO PUEDE SER 11)

$$m.c.m(6,11) = 66$$

LUEGO $ord(5,12) = 66$ EN $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{33}.$

PROBLEMA 6: $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[x]/x^2-2$ tiene orden

$$|\mathbb{F}| = 5^2 = 25$$

Por tanto $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ tiene orden 24,

y sabemos que es un grupo cíclico.

Luego $\alpha^{24} \equiv 1$ y así

$$\alpha^{51} = (\alpha^{24})^2 \alpha^3 = \alpha^2 \alpha = 2\alpha.$$

$$\alpha^2 - 2 = 0 \iff \alpha^2 = 2$$

Por tanto la ecuación

$$\alpha^{51} y + 3\alpha + 1 = 0$$

$$\iff 2\alpha y + 3\alpha + 1 = 0$$

Despejando

$$y = -(3\alpha+1)\cdot(2\alpha)^{-1} =$$

$$= (2\alpha+4)(2\alpha)^{-1}$$

Como $\alpha^2 = 2 \Rightarrow 3\alpha^2 = 1 \iff \alpha(3\alpha) = 1$

además $2 \times 3 = 1$

Luego $\boxed{(2\alpha)^{-1} = (2^{-1})(\alpha^{-1}) = 3 \times 3\alpha = 4\alpha.}$

Así $\boxed{y} = (2\alpha+4)\,4\alpha = 8\alpha^2 + 16\alpha =$

$$= 8 \times 2 + 16\alpha = \boxed{1+\alpha}$$