EXAMEN FINAL: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

29 de junio de 2018

1.- Se considera la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^n x$ donde $x \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

a) Calcula el límite puntual.

b) ¿Hay convergencia uniforme en el intervalo $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$?

2.- Calcula la serie de Fourier para $s(x) = x(\pi - x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi)$. ¿A qué valor converge la serie para $x = \pi$?

3.- Escribe una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y no homogénea que tenga como solución la función:

$$y(t) = e^{2t} - e^t + t^2$$

4.- Estudia la existencia de solución y resuelve, cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & \equiv & 5 \mod 11 \\ 7x & \equiv & 1 \mod 10 \\ 2x & \equiv & 3 \mod 13 \end{array}\right\}$$

5.- Dados los grupos $(\mathbb{Z}_{1764}, +)$, $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{49} \times \mathbb{Z}_9, +)$ y $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_9, +)$, se sabe que dos son isomorfos y el otro no lo es. ¿Cuáles son los isomorfos y cuál no lo es? Justifica tu respuesta.

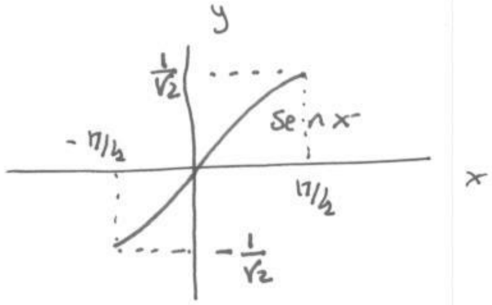
6.- a) Prueba que $x^2 + x + 1$ es el único polinomio de grado 2 de $\mathbb{Z}_2[x]$ irreducible.

b) Sea $\alpha = [x] \in \mathbb{Z}_2[x]/(x^5 + x^2 + 1)$. Calcula $(\alpha^5 + \alpha^2 + \alpha + 1)^{64}$.

La revisión del examen se efectuará el día 5 de julio a las 15:30 horas en el aula 5. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

PROBLEMA 1:



a) LA FUNCIÓN sen x ES CRECIENTE EN $[-\pi/4, \pi/4]$ Y

$$|\operatorname{sen} x| \le \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \qquad \forall x \in [-\pi/4, \pi/4].$$

ASÍ LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^n x$ ES UNA SERIE GEOMÉTRICA PARA CADA $x \in [-\pi/4, \pi/4]$. POR TANTO SU SUMA ES.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^n x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}.$$

b) COMO $|\operatorname{sen}^n x| \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Y $\forall x \in [-\pi/4, \pi/4]$.

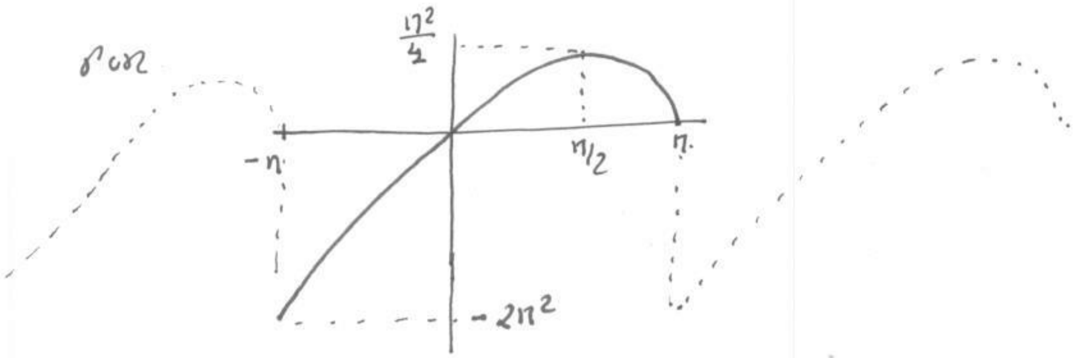
Y COMO LA SERIE GEOMÉTRICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

SE PUEDE APLICAR LA PRUEBA M-WEIERSTRASS QUE ME DICE QUE LA SERIE DE FUNCIONES $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^n x$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[-\pi/4, \pi/4]$.

PROBLEMA 2:

LA FUNCIÓN $S(x) = x(\pi - x)$ SE REPRESENTA POR



NO ES UNA FUNCIÓN PAR.

NO ES UNA FUNCIÓN IMPAR

NO ES UNA FUNCIÓN TAL QUE $S(-\pi) = S(\pi)$, LUEGO SU EXTENSIÓN 2π-PERIÓDICA NO ES CONTINUA EN $-\pi$ NI EN π.

SIN EMBARGO EXISTE $S(\pi^-) = 0$ $S(\pi^+) = -2\pi^2$

Y LAS DERIVADAS LATERALES $S'(x) = \pi - 2x$ SI $x \in (-\pi, \pi)$.

Y $S'(\pi^-) = -\pi$ Y $S'(\pi^+) = S'(-\pi) = 3\pi$.

SERIE DE FOURIER.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\pi - x^2 \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2\pi}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\frac{\pi^3}{2}} - \frac{\pi^3}{3} - \left(\cancel{\frac{\pi^3}{2}} + \frac{\pi^3}{3} \right) \right) = -\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x\pi - x^2)\cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ x\cos nx \text{ IMPAR}}}{=} 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{PARTES}}}{=} \frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{n} x \operatorname{sen} nx \, dx =$$

$$= -\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{PARTES}}}{=} -\frac{2}{n}\left(-\frac{x\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx}_{0} \right)$$

$$= \frac{2}{n^2}\left(x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{2}{n^2}\left(\pi \cos n\pi + \pi \cos n\pi \right) = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n.$$

LUEGO $d_n = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n \right) = \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x\pi - x^2)\,\text{sen}\,nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}\,nx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\text{sen}\,nx\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\text{sen}\,nx\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ x^2\,\text{sen}\,nx \text{ ES IMPAR.}}}{=} 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}\,nx\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{PARTES}}}{=} \frac{-x\cos nx}{n.}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}_{0} =$$

$$= \frac{-x\cos nx}{n}\Big|_{-n}^{\pi} = \frac{-\pi\cos n\pi.}{n} - \frac{\pi\cos n\pi.}{n} =$$

$$= \pi\frac{2}{n}(-1)^{n+1.}$$

ASÍ $b_n = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1.}$

LA SERIE DE FOURIER DE S ES EN TOTAL.

$$\boxed{-\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}\cos nx + \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}\,\text{sen}\,nx}$$

LOS TEOREMAS DE CONVERGENCIA NOS DICEN QUE

$$S(x) = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}\cos nx + \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}\,\text{sen}\,nx$$

PARA $x \in (-\pi,\pi)$.

AHORA COMO $\exists$ $S'(\pi^+)$ y $S'(\pi^-)$ LA SERIE DE FOURIER EN $x=\pi$ CONVERGE A

$$\frac{S(\pi^-)+S(\pi^+)}{2} = \underline{\underline{\underline{-\pi^2}}} = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}\cos n\pi =$$

$$= -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}(-1)^{n}.$$

OBSERVEMOS QUE

$$-\pi^2 = -\frac{\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

Y ASÍ $\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)\frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$ FÓRMULA QUE YA CONOCEMOS.

PROBLEMA 3:) $y(t) = e^{2t} - e^{t} + t^{2}$

SEA $y'' + ay' + by = f(t)$ UNA EDL DE 2: ORDEN LINEAL CON COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA.

EL CONJUNTO DE SOLUCIONES SERÁ UNA SOLUCIÓN PARTICULAR: t^{2}

MÁS CUALQUIER SOLUCIÓN DE LA EDO.L HOMOGÉNEA ASOCIADA $c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

SI e^{2t} y e^{t} SON SOLUCIONES DE LA HOMOGÉNEA ES LA ENTONCES $(\lambda - 2)(\lambda - 1) = \lambda^{2} - 3\lambda + 2$ ES LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA Y ASÍ

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = 0}$$

ES LA SOLUCIÓN HOMOGÉNEA QUE BUSCAMOS.

COMO QUEREMOS QUE $h(t) = t^{2}$ SEA SOLUCIÓN DE LA EDL NO HOMOGÉNEA $h'(t) = 2t$

$h''(t) = 2$

ASÍ $h''(t) - 3h'(t) + 2h(t) = 2 - 6t + 2t^{2} = f(t)$.

LUEGO LA EDO.L BUSCADA ES

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = 2t^{2} - 6t + 2}$$

PROBLEMA 4:

$$x \equiv 5 \mod 11$$
$$7x \equiv 1 \mod 10$$
$$2x \equiv 3 \mod 13$$

OBSERVEMOS QUE 11, 10 Y 13 SON PRIMOS ENTRE SÍ. POR OTRO LADO

$$7 \times 3 = 21 \equiv 1 \mod 10$$
$$2 \times 7 = 14 \equiv 1 \mod 13$$

LUEGO EL SISTEMA DE CONGRUENCIAS ANTERIOR ES EQUIVALENTE A

$$x \equiv 5 \mod 11$$
$$x \equiv 1 \times 3 = 3 \mod 10$$
$$x \equiv 3 \times 7 = 21 \equiv 8 \mod 13$$

AHORA ESTAMOS EN CONDICIONES DE APLICAR EL TEOREMA CHINO DEL RESTO:

$$x \equiv 5 \times 130 \times [130^{-1}]_{11} + 3 \times 143 \times [143^{-1}]_{10} + 8 \times 110 \times [110^{-1}]_{13}$$

```
130 |11
 20  11
  9
```

- $130 \equiv 9 \mod 11$ $\quad 9 \times 5 = 45 \equiv 1 \mod 11$
- $143 \equiv 3 \mod 10$ $\quad 3 \times 7 = 21 \equiv 1 \mod 10$
- $110 \equiv 6 \mod 13$ $\quad 6 \times 11 = 66 \equiv 1 \mod 13$

```
110 |13
 06  8
```

LUEGO

$$\boxed{X \equiv 5 \times 130 \times 5 + 3 \times 143 \times 7 + 8 \times 110 \times 11 =}$$
$$= 25 \times 130 + 21 \times 143 + 88 \times 110$$
$$= 3250 + 3003 + 9680 = 15933 \mod_{11 \times 10 \times 13}$$
$$\boxed{\equiv 203 \mod 1430}$$

```
 130
× 25
 650
260
3250

 143
× 21
 143
286
3003

15933 |1430
01633  11
 0203
```

COMPROBACIÓN

```
203 |11
 93  18
  5

203 |13
 73  15
  8
```

PROBLEMA 5: $4 \times 49 \times 9 = 4 \times 7 \times 7 \times 9 =$

$= 36 \times 49 = 1764$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 36 \\ \hline 294 \\ 147 \\ \hline 1764 \end{array}$$

- LOS TRES SON GRUPOS DE ORDEN 1764.
- $(\mathbb{Z}_{1764}, +)$ ES CÍCLICO
- COMO 4, 49 Y 9 NO TIENEN DIVISORES COMUNES

$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{49} \times \mathbb{Z}_9, +)$ ES CÍCLICO

- EN $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_9, +)$

m.c.m $(4,7,7,9) =$
$= 28 \times 9 = 252$

DE CUALQUIER ELEMENTO

252 ES EL ORDEN MÁXIMO

LUEGO NO ES CÍCLICO.

LOS DOS PRIMEROS GRUPOS SON CÍCLICOS, DE HECHO SOLO EXISTE UN GRUPO CONMUTATIVO CÍCLICO DE 1764 ELEMENTOS, SALVO ISOMORFISMOS; Y POR TANTO SON LOS ISOMORFOS.

PROBLEMA 6: a) LOS POLINOMIOS DE GRADO 2 DE $\mathbb{Z}_2[x]$

SON:
x^2 RAIZ 0
x^2+1 RAIZ 1
x^2+x RAIZ 0 Y 1
x^2+x+1 NO TIENE RAÍCES, LUEGO ES IRREDUCIBLE.

COMO NO HAY MÁS POLINOMIOS DE GRADO 2, x^2+x+1 ES EL ÚNICO IRREDUCIBLE DE GRADO 2.

b) $x^5+x^2+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ NI 0 NI 1 SON RAÍCES, LUEGO NO TIENE RAÍCES EN $\mathbb{Z}_2$

SI <u>NO</u> FUESE IRREDUCIBLE, NECESARIAMENTE $x^2+x+1 \mid x^5+x^2+1$ (POR GRADO x^5+x^2+1 TENDRÍA QUE SEA DIVISIBLE POR UN POLINOMIO DE GRADO 2 IRREDUCIBLE Y POR OTRO DE GRADO 3 IRREDUCIBLE)

AHORA $$\begin{array}{l|l} x^5+x^2+1 & x^2+x+1 \\ \hline x^4+x^3+x^2+1 & x^3+x^2 \\ \quad 1 & \end{array}$$

x^2+x+1 NO DIVIDE A x^5+x^2+1. LUEGO ES IRREDUCIBLE.

POR OTRO LADO $x^5+x^2+x+1 = (x^5+x^2+1) + x \equiv x$ EN EL CUERPO $\mathbb{Z}_2[x]/x^5+x^2+1$.

COMO $\left|\mathbb{Z}_2[x]/_{x^5+x^2+1} \setminus \{0\}\right| = 2^5-1 = 31$

$(x^5+x^2+x+1)^{64} = (x)^{64} = x^{2\cdot 31+2} = x^2$ LA SOLUCIÓN QUE BUSCAMOS