EXAMEN FINAL: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

25 de Junio de 2019

1.- Demuestra que la siguiente integral existe y calcula su valor:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)x^n\right) \mathrm{d}x$$

2.- Calcula la serie de Fourier de la función triángulo $T(x) := 1 - |x|$ con $x \in [-1, 1]$.

3.- Se sabe que la velocidad a la que crece la población de una ciudad es proporcional a la población de la misma. Si la población se dobló en 3 años y en 5 años alcanzó la cifra de 40,000 personas ¿cuántas personas vivían en la ciudad hace 5 años?

4.- Encuentra x que satisfaga: $25x \mod 65 = 5 \cdot 27^{8042} \mod 10$.

5.- Dado el grupo $(G, +)$, donde $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{56}$. ¿Cuál es el orden máximo de los elementos del grupo? Encuentra el orden del $([9]_{12}, [16]_{28}, [14]_{56})$. Justifica la respuesta.

6.- Sea $A := \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - x + 1)$.
a) ¿Es A un cuerpo? Justifica tu respuesta.
b) Calcula un representante de $\beta = [x^4 + x^2]$ en A, y su inverso, si existe.

La revisión del examen se efectuará el día 2 de Julio a las 15h 30' horas en el aula 12. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

1:) $\displaystyle\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n\right) dx$

LA SERIE DE FUNCIONES $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n \quad x \in [0, 1/2]$

RESULTA QUE $\displaystyle |(n+1)\, x^n| \leq \frac{n+1}{2^n} \quad \forall x \in [0, 1/2]$

Y COMO LA SERIE NUMÉRICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} < \infty$$

(CRITERIO DEL COCIENTE, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}\,\frac{1}{2} = 1/2 < 1$)

ASÍ LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE LA SERIE DE FUNCIONES $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[0, 1/2]$ Y POR TANTO

$$\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} (n+1)\, x^n\, dx \underset{\text{INTEGRANDO}}{=}$$

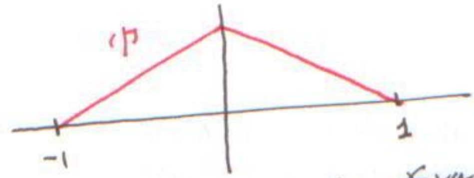
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{n+1} \Big|_0^{1/2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \underset{\substack{\text{SERIE}\\ \text{GEOMÉTRICA}}}{=}$$

$$= \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

2.] $f(x) = 1 - |x| \quad x \in [-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$ ASÍ

FUNCIÓN PAR



EL PERIODO DE ESTA FUNCIÓN ES 2, LUEGO LOS COEFICIENTES DE FOURIER ASOCIADOS SON

$$b_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} n x \, dx \underset{\downarrow}{=} 0$$

(f sen IMPAR)

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 1$$ (ÁREA DEL TRIÁNGULO)

$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \cos \pi n x \, dx \underset{\downarrow}{=} 2 \int_0^1 (1 - x) \cos \pi n x \, dx =$$

(f cos PAR)

$$= 2 \left(\int_0^1 \cos \pi n x \, dx - \int_0^1 x \cos \pi n x \, dx \right) = 2 \left(0 - \left(\frac{1}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \right) \right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}$$ SI n IMPAR, O EN OTRO CASO

$$\int_0^1 \cos \pi n x \, dx = \frac{\operatorname{sen} \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 = \frac{\operatorname{sen} \pi n}{\pi n} - 0 = 0$$

$$\int_0^1 x \cos \pi n x \, dx \underset{\downarrow}{=} \frac{x \operatorname{sen} \pi n x}{n \pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \pi n x}{n \pi} =$$

PARTES

$$= \int_0^1 - \frac{\operatorname{sen} \pi n x}{n \pi} \, dx = \frac{\cos \pi n x}{\pi^2 n^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2 n^2} \left[\cos \pi n - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} \frac{-2}{\pi^2 n^2} & \text{SI } n \text{ IMPAR} \\ 0 & \text{SI } n \text{ ES PAR} \end{cases}$$

LA SERIE DE FOURIER BUSCADA ES

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos (2k+1) \pi x} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos \pi (2k+1) x$$

COMPROBACIÓN SI $x = \pm 1/2$ $\quad f(1/2) = 1/2$ Y $\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^2} \underbrace{\cos \frac{\pi}{2} (2k+1)}_{0} = 1/2$

3:] t tiempo; x(t) población en el tiempo t.

La velocidad a la que varía x

$$\begin{cases} x'(t) = a\, x(t). \\ \quad \downarrow \\ \quad \text{constante; } x' \text{ proporcional a } x \\ x(0) = \,?? \\ x(5) = 40.000 \\ x(3) = 2\, x(0). \end{cases}$$

Con estos datos resolvemos la E.D.O lineal de 1º orden y después trataremos de encontrar x(0).

Solución de la E.D.O

$$x'(t) = a\,x(t) \iff \frac{x'(t)}{x(t)} = a \quad \text{integrando}$$

$$\ln|x(t)| = at + k$$

Así $x(t) = k\, e^{at}$ donde k depende de los datos iniciales

Ahora $x(5) = k\, e^{5a} = 40.000$

y $x(0) = k$

Luego $k = (40.000)\, e^{-5a}$.

Por otro lado $x(3) = 2\,x(0) = 2k$

y $x(3) = k\, e^{3a}$

Luego así $e^{3a} = 2 \Rightarrow \boxed{a = \tfrac{1}{3}\ln 2}$

Luego $\boxed{k = x(0)} = (40.000)\, e^{-\frac{5}{3}\ln 2} =$

$$= (40.000)\frac{1}{2^{5/3}} = \boxed{\frac{40.000}{\sqrt[3]{32}}}$$

Así $\boxed{x(t)} = \dfrac{40.000}{\sqrt[3]{32}}\, e^{\frac{t}{3}\ln 2} =$

$$= \boxed{\frac{40.000}{\sqrt[3]{32}} \cdot \sqrt[3]{2^t}}$$

4:] $y = 25x \mod 65$

$y = 5 \cdot 27^{8042} \mod 10$

En primer lugar ¿27^{8042}? Como $mcd(27,10)=1$

$\phi(10) = \phi(2)\,\phi(5) = 1 \cdot 4 = 4$, el teorema de Euler nos dice que

$$27^4 \equiv 1 \mod 10$$

Luego $27^{8042} = (27)^{4 \cdot 2010} \cdot 27^2 \equiv$

$\equiv 27^2 \equiv 7^2 \equiv 49 \equiv 9 \mod 10$

$27 \equiv 7 \mod 10$

Luego $y = 5 \cdot 9 \mod 10$ $(5 \cdot 9 = 45)$

o lo que es lo mismo

$$y \equiv 5 \mod 10$$

Los elementos de $\mathbb{Z}_{65}$ congruentes a $5 \in \mathbb{Z}_{10}$

son $k = 5, 15, 25, 35, 45$ y 55

Así $25x \equiv k \mod 65$ es decir

$25x = k + k' 65$ donde $\frac{k}{5} = 1, 3, 5, 7, 9$ y 11

Luego $5x = \frac{k}{5} + k' 13$ $\quad 5^{-1} \equiv 8 \mod 13$

Es decir $5x \equiv \frac{k}{5} \mod 13$.

Luego $x \equiv \frac{k}{5} \cdot 8 \mod 13$

Es decir $x \equiv 8 \mod 13$

ó $x \equiv 8 \cdot 3 = 24 \equiv 11 \mod 13$

ó $x \equiv 8 \cdot 5 \equiv 1 \mod 13$

ó $x \equiv 8 \cdot 7 = 56 \equiv 4 \mod 13$

ó $x \equiv 8 \cdot 9 = 72 \equiv 7 \mod 13$

ó $x \equiv 8 \times 11 = 88 \equiv 10 \mod 13$

5°] $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{56}$

$\text{mcm}(12, 28, 56) = \text{mcm}(2^2 \times 3, 7 \times 2^2, 2^3 \times 7) =$

$= 2^3 \times 3 \times 7 = 8 \times 21 = 168$

Luego el orden máximo de cualquier elemento de G es precisamente $\underline{\underline{168}}$

Por otro lado el orden de $G: 12 \times 28 \times 56$.

Cálculo del orden de $([9]_{12}, [16]_{28}, [14]_{56})$.

$4 = \text{ord } 9$ en $\mathbb{Z}_{12}$ ya que (como $9 = 3 \times 3$ y $12 = 3 \times 4$

$7 = \text{ord } 16$ en $\mathbb{Z}_{28}$ ya que (como $16 = 4^2$ y $28 = 4 \times 7$

$4 = \text{ord } 14$ en $\mathbb{Z}_{56}$ ya que (como $14 = 2 \times 7$ y $56 = 8 \times 7$

Luego $\text{ord}([9]_{12}, [16]_{28}, [14]_{56}) =$

$= \text{mcm}(\text{ord } 9, \text{ord } 16, \text{ord } 14) =$

$\boxed{\text{mcm}(4, 7, 4) = 28 \text{ en } G}$

6:] $A = \mathbb{Z}_5[x] / (x^2 - x + 1)$.

a) Sea el polinomio $f(x) = x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Veamos si es irreducible en $\mathbb{Z}_5$

Como grado de f es 2 y

$$f(0) = 1 \mod 5$$
$$f(1) = 1 \mod 5$$
$$f(2) = 4 - 2 + 1 = 3 \mod 5$$
$$f(3) = 9 - 3 + 1 = 2 \mod 5$$
$$f(4) = 16 - 4 + 1 = 3 \mod 5$$

No tiene raíces, f es irreducible.

Por tanto $A = \mathbb{Z}_5[x] / (x^2 - x + 1)$ es un cuerpo.

b) $\beta = [x^4 + x^2] \in A$

Veamos como es β

$$x^4 + x^2 = x[x^3 + x]$$

Ahora $0 = x(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x$

Luego $\boxed{x^3 = x^2 - x = -1 = 4}$

$x^2 - x + 1 = 0$

Así $x^4 + x^2 = x[4 + x] = x^2 + 4x = x^2 - x = -1$

Luego $[x^4 + x^2] = [-1]$

Así $\boxed{[x^4 + x^2]^{-1} = [-1].}$

Comprobación: el mismo problema por otro camino

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + x^2 & x^2 - x + 1 \\
\hline
-x^4 + x^3 + x^2 & x^2 + x + 1 \\
\hline
0 \quad x^3 & \\
-x^3 + x^2 - x & \\
\hline
x^2 - x & \\
-x^2 + x - 1 & \\
\hline
-1 &
\end{array}$$

Así $[x^4 + x^2] = [-1]$

y claro su inverso es el mismo.