AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen de Septiembre; 7-Septiembre-2012

1.- Calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = (\pi + x)(\pi - x)$, $x \in (-\pi, \pi)$.

2.- Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$y' - x^3 y = 2x^3, \; y(0) = 1.$$

3.- Resuelve el siguiente problema de Cauchy usando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y''(x) - 8y'(x) + 15y(x) = 2e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

4.- Calcula el máximo común divisor de los polinomios f y g y expresarlo en la forma $a(x)f(x) + b(x)g(x)$ donde

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x \;\text{ y }\; g(x) = x^2 + x - 1, \;\text{ en }\; \mathbb{Z}_3[x].$$

5.- Calcula el orden de todos los elementos del grupo de unidades del cuerpo de 8 elementos $\mathbb{F}_8 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.

6.- Sea $q(x) = x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Determinar si $q(x)$ es irreducible.

Observaciones:

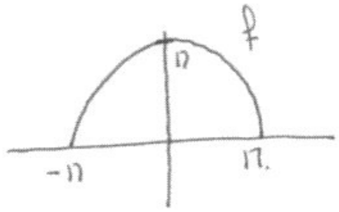
.- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.

.- Todas las preguntas se puntuan igual.

.- La **revisión del examen** será el próximo ????? de Septiembre a las ???h en el aula ??.

PROBLEMA 1: $f(x) = (\pi + x)(\pi - x) = \pi^2 - x^2 \qquad x \in (-\pi, \pi)$

f ES PAR, $f(-x) = \pi^2 - (-x)^2 = \pi^2 - x^2 = f(x)$



POR TANTO AL CALCULAR LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE f

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \underset{f \text{ PAR}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi^2 - x^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\pi^3 - \frac{\pi^3}{3} \right] = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \underset{f \text{ PAR}}{=} 2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx \, dx.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi^2 \cos nx \, dx = \pi \left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \underset{\text{P. PARTES}}{=} -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \underset{\text{P. PARTES}}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left(-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left(-\frac{\pi \cos n\pi}{n} \right) = \frac{2}{n^2} (-1)^{n+1}$$

LUEGO $a_n = 2 \dfrac{2}{n^2} (-1)^{n+1}$

Y LA SERIE DE FOURIER DE f ES

$$\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx.$$

PROBLEMA 2:

$$\begin{cases} y' - x^3 y = 2x^3 \\ y(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y' = x^3 y + 2x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ES UNA E.D.O LINEAL DE PRIMER ORDEN NO HOMOGÉNEA

RESOLVAMOS LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA $y' = x^3 y$

ASÍ $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = x^3$ E INTEGRANDO

$$\ln y(x) = \frac{x^4}{4} \quad \text{LUEGO} \quad y(x) = k\, e^{\frac{x^4}{4}} \quad k \in \mathbb{R}$$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA

UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN y_0 /

EN ESTE CASO ES MUY FÁCIL BUSCAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR CONSTANTE $y_0 \equiv cte$ SI $y_0 = -2$, $y_0' = 0$

Y SE TIENE LA IGUALDAD.

POR TANTO LAS SOLUCIONES DE $y' = x^3 y + 2x^3$ SON DE LA FORMA

$$y(x) = k\, e^{\frac{x^4}{4}} - 2 \qquad k \in \mathbb{R}$$

LA SOLUCIÓN QUE VERIFICA $y(0) = 1$, SERÁ AQUELLA QUE $y(0) = k\, e^0 - 2 = 1$ LUEGO $k = 3$

Y ASÍ $y(x) = 3\, e^{x^4/4} - 2$ ES LA SOLUCIÓN BUSCADA.

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

USANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$\mathcal{L}(y'' - 8y' + 15y) = \mathcal{L}y(s)(s^2 - 8s + 15) = \mathcal{L}(2e^{3x})(s) =$$

$$= 2\,\frac{1}{s-3}$$

LUEGO $\mathcal{L}y(s) = \dfrac{1}{s^2-8s+15}\;\dfrac{2}{s-3} =$

$$= \frac{1}{(s-3)(s-5)} \cdot \frac{2}{(s-3)} = \frac{A}{(s-3)} + \frac{B}{(s-3)^2} + \frac{C}{s-5}$$

DESCOMPOSICIÓN
EN FRACCIONES
SIMPLES

ASI $A(s-3)(s-5) + B(s-5) + C(s-3)^2 =$

$= As^2 - 8sA + 15A + Bs - 5B + Cs^2 - 6sC + 9C = 2$

LUEGO

$$\begin{aligned} A + + C &= 0 \\ -8A + B - 6C &= 0 \\ 15A - 5B + 9C &= 2 \end{aligned}$$

$A = -C$

LUEGO $B + 2C = 0$

$-5B - 6C = 2$

ASI $B = -2C$ Y $10C - 6C = 2 \Rightarrow C = 1/2$, $A = -1/2$ y $B = -1$

ASI $\mathcal{L}y(s) = \dfrac{-1/2}{s-3} - \dfrac{1}{(s-3)^2} + \dfrac{1/2}{s-5}$

BUSCANDO EN LAS TABLAS LAS ANTITRANSFORMADAS DE LAS FRACCIONES ANTERIORES SE VE QUE

$$\boxed{y(s) = -\frac{1}{2}e^{3t} - te^{3t} + 1/2\,e^{5t}.}$$

PROBLEMA 4: $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_3[x]$

$g(x) = x^2 + x - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$

VAMOS A APLICAR EL ALGORITMO DE EUCLIDES

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 + x^2 + x & x^2+x-1 \\ -x^4 - x^3 + x^2 & x^2+2 \\ \hline \quad 2x^2 + x & \\ \quad -2x^2 - 2x + 2 & \\ \hline \quad\quad 2x + 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 + x - 1 & 2x+2 \\ -4x^2 - 4x & 2x \\ \hline \quad 2 & \end{array}$$

	q	α	β
$x^4+x^3+x^2+x$		1	0
x^2+x-1		0	1
$2x+2$	x^2+2	1	$2x^2+1$
2	$2x$	x	$1-(2x)(2x^2+1)$
0	$2x+2$		

ASÍ $m.c.d.(f, g) = 2$ Y LA IDENTIDAD DE BEZOUT NOS DICE QUE

$$2 = x\, f(x) + (2x^3 + x + 1)\, g(x).$$

O BIEN $1 = 2x\, f(x) + (x^3 + 2x + 2)\, g(x).$

PROBLEMA 5: $\mathbb{F}_8 = \mathbb{Z}_2[x]/x^3+x+1$ ES UN CUERPO DE CARDINAL $2^3 = 8$ (YA QUE x^3+x+1 ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Z}_2[x]$, $x = 0$ ó 1 NO SON RAÍCES DE x^3+x+1), LUEGO $(\mathbb{F}_8^*, \times)$ ES UN GRUPO CÍCLICO DE ORDEN 7, COMO 7 ES PRIMO, SI $\alpha \in \mathbb{F}_8^*$ CON $\alpha \neq 1$, SU ORDEN TIENE QUE SER 7 POR EL TEOREMA DE LAGRANGE.

PROBLEMA 6: $q(x) = x^5 + x^4 + 1 = \begin{cases} (x-\alpha)(x^4 + \dots) & (1) \\ (x^2+ax+b)(x^3 + \dots) & (2) \\ x^5+x^4+1 \text{ IRREDUCIBLE} & (3) \end{cases}$

PARA $x = 0$ ó 1 NO SON RAÍCES DE q LUEGO (1) ESTÁ DESCARTADO. x^2+x+1 ES EL ÚNICO POLINOMIO DE GRADO 2 IRREDUCIBLE SOBRE $\mathbb{Z}_2$. AHORA

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^4 + 1 & x^2+x+1 \\ x^5 + x^4 + x^3 & x^3+x+1 \\ \hline \quad x^3 + 1 & \\ \quad x^3 + x^2 + x & \\ \hline \quad x^2 + x + 1 & \end{array}$$

LUEGO q NO ES IRREDUCIBLE

$$\boxed{q(x) = (x^3+x+1)(x^2+x+1)}$$