EXAMEN FINAL: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Septiembre de 2017

1.- De una señal (o función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) se sabe que es 2π-periódica y derivable. Además su serie de Fourier es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2+1}.$$

Prueba que la serie de Fourier converge uniformemente a la señal f en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

2.- La transformada de Fourier de una señal $f(x)$ es $F(\omega) = \omega^2 \chi_{[-1,1]}(\omega)$. Calcula $f(x)$.

3.- Calcula la solución común de las dos siguientes ecuaciones diferenciales:

$$y' + y = 4\cos(2t) - 3\operatorname{sen}(2t), \quad y'' + 4y = 5e^{-t}$$

4.- Calcula el máximo común divisor de $a = 2^{222} - 4$ y $b = 2^{222} + 6$.

5.- Dados los grupos $(\mathbb{Z}_{1764}, +)$, $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{49} \times \mathbb{Z}_9, +)$ y $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_9, +)$, se sabe que dos son isomorfos y el otro no lo es. ¿Cuáles son los isomorfos y cuál no lo es? Justifica tu respuesta.

6.- Considérense los anillos:

$$A = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 - x + 1), \qquad B = \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - x + 1)$$

1. ¿Es A un cuerpo? ¿Y B?
2. Calcula el inverso de $[x + 2]$ en A y en B.

La revisión del examen se efectuará el día 14 de septiembre a las 14 horas en el aula 12. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

PROBLEMA 1: Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica y derivable, el teorema de convergencia nos dice que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2+1} \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

es decir f es el límite puntual de la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2+1}$.

Además $\left| \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$, así por la prueba M-Weierstrass se tiene que la convergencia es uniforme sobre $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 2: Dado que existe $\hat{f}(w) = w^2 \chi_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$ (ya que $\int_{-\infty}^{\infty} w^2 \chi_{[-1,1]}(w)\, dw = \int_{-1}^{1} w^2\, dw < \infty$), podemos suponer que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y así podemos aplicar el teorema de inversión que nos dice que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} w^2 (\cos wx + i \operatorname{sen} wx)\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} w^2 \cos wx\, dw = \frac{1}{\pi} \int_0^1 w^2 \cos wx\, dw \underset{\text{p. partes}}{=}$$

$g(w) = w^2$ en $[-1,1]$ es par

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{w^2 \operatorname{sen} wx}{x} \Big|_0^1 - \int_0^1 2w \frac{\operatorname{sen} wx}{x}\, dw \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{w(-\operatorname{sen} wx)}{x}\, dw \underset{\text{p. partes}}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{w \cos wx}{x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos wx}{x^2}\, dw \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{2 \cos x}{\pi x^2} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} wx}{x^3} \Big|_0^1 \right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x \pi} + \frac{2 \cos x}{\pi x^2} - \frac{2 \operatorname{sen} x}{\pi x^3}$$

PROBLEMA 3:
$$\begin{cases} y' + y = 4\cos 2t - 3\,\text{sen}\, 2t & (1) \\ y'' + 4y = 5e^{-t} & (2) \end{cases}$$

LUEGO
$$y = -y' + 4\cos 2t - 3\,\text{sen}\,2t$$
$$= -y''/4 + \frac{5}{4}e^{-t}$$

REORDENANDO ESTA IGUALDAD

$$-y''/4 + y' = 4\cos 2t - 3\,\text{sen}\,2t - \frac{5}{4}e^{-t}$$

(*) $\Leftrightarrow$ $\boxed{-y'' + 4y' = 16\cos 2t - 12\,\text{sen}\,2t - 5e^{-t}}$ EDO LINEAL DE 2º ORDEN

RESOLVEMOS ESTA ECUACIÓN:

CASO HOMOGÉNEO $-y'' + 4y' = 0$
$$-\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 4$$

ASÍ $y(t) = k_1 + k_2 e^{4t}$ SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA.

COMO $2i$ Y -1 NO SON RAÍCES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA $-\lambda^2 + 4\lambda = 0$, PROBAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL TIPO

$$y_0(t) = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t + Ce^{-t}$$
$$y_0'(t) = -2A\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t - Ce^{-t}$$
$$y_0''(t) = -4A\cos 2t - 4B\,\text{sen}\,2t + Ce^{-t}$$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN

$$4A\cos 2t + 4B\,\text{sen}\,2t - Ce^{-t} - 8A\,\text{sen}\,2t + 8B\cos 2t - 4Ce^{-t} =$$
$$= (4A + 8B)\cos 2t + (4B - 8A\,\text{sen}\,2t) - 5Ce^{-t} =$$
$$= 16\cos 2t - 12\,\text{sen}\,2t - 5e^{-t}$$

ASÍ
$$\begin{cases} 4A + 8B = 16 \\ -8A + 4B = -12 \\ -5C = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B = 4 \\ -2A + B = -3 \\ C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{array}$$

LUEGO $y(t) = k_1 + k_2 e^{4t} + 2\cos 2t + \text{sen}\,2t + e^{-t}$ $\quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA EDO (*)

AHORA BUSCAMOS UNA SOLUCIÓN COMÚN A (1) Y (2)

LUEGO ENTRANDO CON

$$y(t) = k_1 + k_2 e^{4t} + 2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t + e^{-t}$$

$$y'(t) = 4k_2 e^{4t} - 4\operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t - e^{-t}$$

EN LA ECUACIÓN (1)

$$4k_2 e^{4t} - 4\operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t - \cancel{e^{-t}} + k_1 + k_2 e^{4t} + 2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t + \cancel{e^{-t}}$$

$$= k_1 + 5k_2 e^{4t} + 4\cos 2t - 3\operatorname{sen} 2t = 4\cos 2t - 3\operatorname{sen} 2t$$

ESCRIBIMOS AHORA LA SEGUNDA PARTE DE LA ECUACIÓN (1)

LUEGO $k_1 = k_2 = 0$.

ASÍ $\boxed{y_0(t) = 2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t + e^{-t}}$ ES SOLUCIÓN DE (1).

AHORA SÓLO QUEDA COMPROBAR QUE y_0 ES SOLUCIÓN TAMBIÉN DE (2)

$$y_0(t) = 2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t + e^{-t}$$

$$y_0''(t) = -8\cos 2t - 4\operatorname{sen} 2t + e^{-t}$$

ENTRANDO CON y_0 EN LA ECUACIÓN (2)

$$-8\cos 2t - 4\operatorname{sen} 2t + e^{-t} + 4(2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t + e^{-t}) =$$

$$= \cancel{-8\cos 2t} \cancel{-4\operatorname{sen} 2t} + e^{-t} + \cancel{8\cos 2t} + \cancel{4\operatorname{sen} 2t} + 4e^{-t}$$

$$= 5e^{-t}.$$

LUEGO EFECTIVAMENTE TAMBIÉN ES SOLUCIÓN.

PROBLEMA 4: $m.c.d(2^{222}-4, 2^{222}+6) =$

21a y 21b

$$2\, m.c.d(2^{222-1}-2, 2^{222-1}+3)$$

Para calcular este este último m.c.d, aplicamos el algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r|l} 2^{221}+3 & 2^{221}-2 \\ \hline 5 & 1 \end{array}$$

Ahora $2^{221}-2 \,\underline{|5}$, para conocer el resto, necesitamos saber

$$2^{221}-2 \equiv x \mod 5$$

Ahora $m.c.d(2,5)=1$ y la función de Euler de 5 es $\varphi(5)=4$,

$$\begin{array}{r|l} 221 & 4 \\ \hline 21 & 55 \\ 1 & \end{array}$$

Luego $2^{221} = 2(2^4)^{55} \equiv 2\times 1 \mod 5.$

Luego $2^{221}-2 \equiv 2-2 \equiv 0 \mod 5.$

Luego por el algoritmo de Euclides

$$5 = m.c.d(2^{222-1}-2, 2^{222-1}+3)$$

Así $\boxed{m.c.d(a,b) = 2\times 5 = 10}$

PROBLEMA 5:

- $(\mathbb{Z}_{1764}, +)$ es el grupo abeliano cíclico de orden 1764

- $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{49} \times \mathbb{Z}_9, +)$ es un grupo abeliano de orden $4 \times 49 \times 9 = 1764$

Como $4 = 2 \times 2$, $49 = 7 \times 7$, $9 = 3 \times 3$, 4, 49 y 9 son primos entre sí

por tanto este grupo es cíclico e isomorfo a $(\mathbb{Z}_{1764}, +)$

- $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_9, +)$ es un grupo abeliano de orden $4 \times 7 \times 7 \times 9 = 1764$

Ahora el orden máximo de un elemento de
$\mathbb{Z}_4$ será 4
de $\mathbb{Z}_7$ será 7
de $\mathbb{Z}_9$ será 9

Luego el orden máximo de un elemento de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_9$ será $m.c.m(4, 7, 9) = 21 \times 9 = 189$.

Luego este grupo no es cíclico y no puede ser isomorfo a ninguno de los de arriba.

PROBLEMA 6:

$\boxed{\text{SEA } A = \mathbb{Z}_3[x]/x^2 - x + 1}$

PARA $x=2$ $\quad 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3 \equiv 0 \mod 3.$

LUEGO EL POLINOMIO $x^2 - x + 1 = (x-2)(x-2)$
NO ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Z}_3$ Y POR TANTO
A NO ES UN CUERPO.

POR OTRO LADO COMO $m.c.d(x+2, x^2 - x + 1) = 1$
VA A EXISTIR $[x+2]^{-1}$ EN A.

VAMOS A CALCULARLO

$$0 = x^2 - x + 1 = x^2 + 2x + 1 = x(x+2) + 1$$

ASÍ $\quad -1 = x(x+2)$

$$\iff 2 = x(x+2)$$

$$\iff 2 \cdot 2 = 1 = 2x(x+2)$$

LUEGO $\quad (x+2)^{-1} = 2x.$

SEA AHORA $\boxed{B = \mathbb{Z}_5[x]/x^2 - x + 1.}$ Y $p(x) = x^2 - x + 1$

$p(0) = 1$
$p(1) = 1$
$p(2) = 4 - 2 + 1 = 3$
$p(3) = 9 - 3 + 1 = 2 \mod 5$
$p(4) = 16 - 4 + 1 = 3 \mod 5$

COMO p ES DE GRADO 2 Y NO TIENE RAÍCES EN $\mathbb{Z}_5$ RESULTA QUE p ES IRREDUCIBLE Y POR TANTO B ES UN CUERPO

- $x+2 \in B$, $x+2 \neq 0$, LUEGO POR SER B UN CUERPO EXISTE $(x+2)^{-1}$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - x + 1 & x+2 \\ \hline x^2 - 2x & x+2 \\ \quad 2x + 1 & \\ \quad -2x - 4 & \\ \qquad 2 & \end{array}$$

LUEGO $\quad 0 = x^2 - x + 1 = (x+2)(x+2) + 2$

ASÍ $\quad -2 = 3 = (x+2)(x+2)$

$$\iff 2 \times 3 = 1 = 2(x+2)(x+2)$$

LUEGO $\quad (x+2)^{-1} = 2x + 4.$