AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen de Septiembre; 6-Septiembre-2013

1.- Sea la función $f(x) = (x-2)^2$, $x \in [0,4]$. Encuentra una expresion de esta función como una serie de senos y cosenos. Utiliza lo anterior para calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2.- Resuelve el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'(x) = 2y(x) + x^2 + 5, \; y(0) = \frac{15}{4}$$

3.- Dado el siguiente sistema de E.D.O.'s lineales de primer orden:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 5x(t) - y(t) \\ x(0) = -1 \text{ y } y(0) = 2 \end{cases}$$

a) Aplica la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema.
b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales en transformadas.
c) Aplica la antitransformada de Laplace a las soluciones del sistema anterior, para hallar las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

4.- Resuelve el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{7} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$$

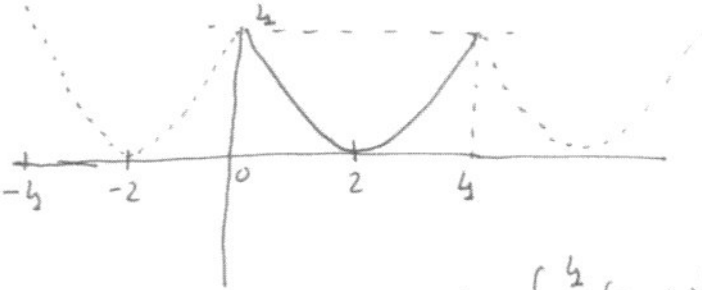
5.- Prueba que el conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ es un ideal sin divisores de cero del anillo $\mathbb{Z}_{10}$. ¿Es A un cuerpo?

6.- Considera el anillo $A = \mathbb{Z}_7[x]/(x^2 + x + 2)$. Sea $\alpha = [x+3]$. Calcula α^{-1} y α^{4900}. Estudia si el polinomio $y^2 + 4y + 2$ es divisible por $y + 5\alpha$ en $A[y]$

Observaciones:

.- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.
.- Cada pregunta se puntua con un máximo de 1,5 puntos.
.- La **revisión del examen** será el próximo Lunes 16 de Septiembre a las 11h 30' en el aula 12.

1) Sea $f(x) = (x-2)^2$ si $x \in [0,4]$ una función 4-periódica



f es par, por tanto

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{4} n x\,dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{4}\int_0^4 (x-2)^2\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^4\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2^3}{3} - \left(-\frac{2^3}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2^3}{3} = \frac{4}{3}$$

Por otro lado

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 (x-2)^2 \cos\frac{\pi}{2} n x\,dx \underset{\text{partes}}{=}$$

$$\frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{2(x-2)^2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} n x}{\pi n}}_{=0}\Big|_0^4 - 2\int_0^4 \frac{(x-2)\,2\,\text{sen}\,\pi/2\, n x}{\pi n}\,dx\right] =$$

$$= \int_0^4 -\frac{(x-2)\,2\,\text{sen}\,\pi/2\, n x}{\pi n}\,dx \underset{\text{partes}}{=}$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}(x-2)\cos\frac{\pi}{2} n x\Big|_0^4 - \frac{4}{\pi^2 n^2}\underbrace{\int_0^4 \cos\frac{\pi}{2} n x\,dx}_{=0} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[2+2\right] = \frac{16}{\pi^2 n^2}$$

Luego a_0 y a_n son los coeficientes de Fourier de f y así como f es continua y tiene derivadas por la derecha y la izquierda en todo punto

$$\Rightarrow \quad f(x) = 4/3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n}{2} x \qquad \forall x \in [0,4]$$

Así para $x=0$ $\quad f(0) = 4 = 4/3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2 n^2}$. Despejando

$$\left(4 - 4/3\right)\frac{\pi^2}{16} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{12-4}{16\times 3}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

2:] $\begin{cases} y'(x) = 2y(x) + x^2 + 5 \\ y(0) = \frac{15}{4} \end{cases}$

EC. HOMOGÉNEA $y'(x) = 2y(x)$ LUEGO $y(x) = k e^{2x}$ $k \in \mathbb{R}$

SOLUCIÓN GENERAL

COMO $x^2 + 5$ ES UN POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO PODEMOS PROBAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL TIPO

$$y_0(x) = Ax^2 + Bx + C$$

ASÍ $2Ax + B = 2(Ax^2 + Bx + C) + x^2 + 5$

ASÍ $-2Ax^2 + 2(A - B)x + B - 2C = x^2 + 5$

LUEGO $A = -1/2$, COMO $2(-1/2 - B) = 0 \Rightarrow -2B = 1 \Rightarrow B = -1/2$

Y $B - 2C = 5$ ASÍ $-\frac{1}{2} - 2C = 5 \Rightarrow 2C = -\frac{1}{2} - 5 = -\frac{11}{4}$

LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA ES

$$\boxed{y(x) = k e^{2x} - 1/2\, x^2 + 1/2\, x - \frac{11}{4} \quad k \in \mathbb{R}}$$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN

COMO $y(0) = \frac{15}{4}$, SE SIGUE QUE

$$y(0) = k - \frac{11}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow k = \frac{26}{4}$$

Y LA SOLUCIÓN BUSCADA ES

$$y(x) = \frac{26}{4} e^{2x} - 1/2\, x^2 - 1/2\, x - \frac{11}{4}$$

— · —

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 5x(t) - y(t) \\ x(0) = -1 \quad y \quad y(0) = 2 \end{cases}$$

APLICANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$\mathcal{L}x'(s): \ s\mathcal{L}x(s) + 1 = \mathcal{L}x(s) - 2\mathcal{L}y(s)$$

$$\mathcal{L}y'(s): \ s\mathcal{L}y(s) - 2 = 5\mathcal{L}x(s) - \mathcal{L}y(s)$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} (1-s)\mathcal{L}x(s) - 2\mathcal{L}y(s) = 1 \\ 5\mathcal{L}x(s) - (1+s)\mathcal{L}y(s) = -2 \end{cases}$$

RESOLVAMOS ESTE SISTEMA LINEAL CUYAS INCOGNITAS SON $\mathcal{L}x(s)$ Y $\mathcal{L}y(s)$

$$\mathcal{L}y(s) = -\tfrac{1}{2}\left[1 - (1-s)\mathcal{L}x(s)\right]$$

Y ASI $\quad 5\mathcal{L}x(s) + \dfrac{(1+s)}{2}\left[1 - (1-s)\mathcal{L}x(s)\right] = -2$

LUEGO $\quad \left[5 - \left(\dfrac{1+s}{2}\right)(1-s)\right]\mathcal{L}x(s) = -2 - \dfrac{1+s}{2}$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{10 - (1-s^2)}{2}\mathcal{L}x(s) = -\frac{5+s}{2}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad (9+s^2)\mathcal{L}x(s) = -(5+s)$$

$$(\Rightarrow) \quad \mathcal{L}x(s) = \frac{-(5+s)}{9+s^2}$$

POR OTRO LADO $\quad \mathcal{L}y(s) = -\tfrac{1}{2}\left[1 + (1-s)\dfrac{(5+s)}{9+s^2}\right] =$

$$= -\tfrac{1}{2}\left[\frac{9+\cancel{s^2} - \cancel{s^2} - 4s + 5}{9+s^2}\right] =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left[\frac{14 - 4s}{9+s^2}\right] = \left[\frac{2s-7}{9+s^2}\right]$$

TENEMOS LAS SIGUIENTES TRANSFORMADAS, MIRANDO LAS TABLAS

$$\mathcal{L}x(s) = -\tfrac{5}{3}\frac{3}{9+s^2} - \frac{s}{9+s^2} \Rightarrow x(t) = -\tfrac{5}{3}\operatorname{sen} 3t - \cos 3t.$$

$$\mathcal{L}y(s) = -\tfrac{7}{3}\frac{3}{9+s^2} + 2\frac{s}{9+s^2} \Rightarrow y(t) = -\tfrac{7}{3}\operatorname{sen} 3t + 2\cos 3t$$

EJERCICIO 4.

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \mod 7 \\ 2x &\equiv 1 \mod 5 \\ x &\equiv 4 \mod 6 \end{aligned} \quad \underset{\times 2^{-1}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{aligned} x &\equiv 3 \mod 7 \\ x &\equiv 3 \mod 5 \\ x &\equiv 4 \mod 6 \end{aligned}$$

COMO 6 5 Y 7 SON PRIMOS ENTRE SI, EL TEOREMA CHINO DEL RESTO NOS DA LA EXISTENCIA DE X.

$$x = 3 \times 5 \times 6 \times 4 + 3 \times 7 \times 6 \times 3 + 4 \times 7 \times 5 \times 5 =$$

$5 \times 6 = 30 \equiv 2 \mod 7$ $\quad$ $7 \times 6 \equiv 2 \mod 5$ $\quad$ $7 \times 5 \equiv 5 \mod 6$

$4 \times 2 = 1$ $\quad$ $2 \times 3 = 1$ $\quad$ $5 \times 5 = 1$

$$24 \times 15 = 120 + 240 = 360$$

$$1438 \,|\, 210 \quad 178 \quad 6$$

$$= 15 \times 24 + 21 \times 18 + 28 \times 25 =$$

$$= 360 + 378 + 700 = 1438 \mod 7 \times 5 \times 6 = 210$$

$$18 \times 21 = 18 + 360 = 378$$

$$\boxed{\text{LUEGO } x \equiv 178 \mod 210}$$

$$28 \times 25 = 140 + 560 = 700$$

EJERCICIO 5 $\quad A = \{2k : k = 0, 1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$

$\quad$ o $k = 0, -1, -2, -3, -4$

COMO $2k - (2k') = 2(k - k') \in A$, $(A +)$ ES UN SUBGRUPO DE $\mathbb{Z}_{10}$

POR OTRA PARTE $\forall r \in \mathbb{Z}_{10}$ Y $\forall 2k \in A$ $\quad r \times 2k = 2 \times r k$

AHORA $\quad 2 \times r \times k \mod 10$

SERÁ $\quad 2 \times r \times k = k' \times 10 + r' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r' < 10 \\ \text{Y } r' \text{ PAR} \end{array} \right.$

LUEGO $\quad 2 \times r \times k \equiv r' \mod 10$ $\quad$ LUEGO $r' \in \{0, 2, 4, 6 \text{ o } 8\} = A$.

ASÍ A ES UN IDEAL.

A NO TIENE DIVISORES DE CERO YA QUE SI $k_1, k_2 \in A$ CON $k_1 \neq 0$ Y $k_2 \neq 0$ $\quad k_1 \times k_2 \equiv 0 \mod 10 \Rightarrow 5 | k_1$ o $5 | k_2$ LO CUAL NO ES POSIBLE.

A NO ES UN CUERPO YA QUE $1 \notin A$, LUEGO NO TIENE ELEMENTO NEUTRO PARA EL PRODUCTO.

EJERCICIO 6 $\quad A = \mathbb{Z}_7[x]/_{x^2+x+2}$

Como $\quad x^2+x+2=0 \iff x^2+x=-2=5$

$\iff x(x+1)=5$

Existe $x\in\mathbb{Z}_7$ con $x(x+1)=5$

$x=3$ ya que $3\cdot 4=12\equiv 5 \mod 7$

Luego $\quad x^2+x+2=(x-3)(x+4)=(x+4)^2$

Así $\mathbb{Z}_7[x]/_{x^2+x+2}$ no es un cuerpo, es un anillo. Además como $x+3$ no divide a x^2+x+2 tiene inverso. Así

$$\begin{array}{l|l} x^2+x+2 & x+3 \\ \hline -x^2-3x & x+5 \\ \quad 5x+2 & \\ -5x-1 & \\ \quad 1 & \end{array}$$

Así $(x+3)(x+5)=x^2+x+2-1=$

$=6$ en $\mathbb{Z}_7[x]$

dividiendo por $6^{-1}=6$.

Luego $(x+3)(6x+2)=1$.

$\alpha^{-1}=6x+2.$

$\alpha^2=(x+3)^2=x^2+6x+2=x^2+x+2+5x=5x$

$\alpha^3=5x(x+3)=5x^2+x=5(-x-2)+x=3x+4$

$\alpha^4=25x^2=4x^2=4(-x-2)=3x+6=3(x+2)$

$\alpha^5=(x+3)(3x+6)=3x^2+15x+18=$

$=3x^2+x+4=3(-x-2)+x+4=$

$=5x+5=5(x+1)$

$\alpha^6=5x(3x+6)=15x^2+30x=x^2+2x=x^2+x+2+x-2=$

$=x+5$

$\alpha^7=(x+3)(x+5)=x^2+8x+15=x^2+x+1=x^2+x+2-1=-1$

Luego $\quad \alpha^{4900}=\left(\alpha^7\right)^{700}=(-1)^{700}=1.$

$y+5\alpha$ tiene por raíz única $-5\alpha=2\alpha$

Si $y+5\alpha$ divide a y^2+4y+2, 2α será raíz de $y^2+4y+\alpha$. Ahora $4\alpha^2+8\alpha+2=4\cdot 5x+4x+12+2=$

$=6x+4x=3x\neq 0$. Luego no es divisible