AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen final: 7 de septiembre de 2015

1.- Dada la serie de funciones $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3x^2+3})^k$,

a) calcula el límite puntual;

b) comprueba que la serie de funciones converge uniforme al límite puntual sobre todo $\mathbb{R}$.

2.- Calcula la única solución del PVI:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y(1+x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

3.- Resuelve $y'' - 6y' + 10y = t^2$ en el caso $y(0) = y'(0) = 0$ y en el caso $y(0) = y'(0) = 1$.

4.- Se consideran los números:

$$a = 10^{36} + 1.072.771 \qquad \text{y} \qquad b = 10^{36} + 1.072.773.$$

Calcula $m.c.d.(a, b)$.
(**Indicación:** piensa en una identidad de Bezout del tipo $ua + vb$).

5.- Calcula el orden de $(6, 10)$ en $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{35}$. ¿Hay algún elemento de orden 525? ¿Cuál?

6.- Se consideran los polinomios $p = x^3 + 1$, $q = x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$

a) Determinar si los conjuntos $\mathbb{Z}_3[x]/(p)$ y $\mathbb{Z}_3[x]/(q)$ son cuerpos. En caso afirmativo calcular su característica, su cardinal y la dimensión como espacio vectorial de $\mathbb{Z}_3$.

b) Calcular, en el caso de que sea posible, el inverso de $x^2 + 1$ en cada uno de los conjuntos anteriores. En caso de no serlo, decir el porqué.

Observaciones:

.- En el examen sólo se puede utilizar papel y bolígrafo

.- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.

.- Cada pregunta se puntua con un máximo de 1,5 puntos.

.- La **revisión del examen** será el próximo lunes 14 de septiembre a las 17h en el aula 11.

1:] a) SI $x \in \mathbb{R}$ $3x^2+3>1$ Y ASÍ

$$0 < \frac{1}{3x^2+3} < 1$$

LUEGO $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3x^2+3}\right)^k$ ES UNA SERIE GEOMÉTRICA CUYA SUMA ES

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3x^2+3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3x^2+3}} =$$

$$= \frac{3x^2+3}{3x^2+2} \quad \text{LÍMITE PUNTUAL}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $0 \leq \frac{1}{3x^2+3} \leq \frac{1}{3}$

Y ASÍ $\forall k \in \mathbb{N}$ Y $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\left(\frac{1}{3x^2+3}\right)^k\right| \leq \frac{1}{3^k}$

COMO $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$ ES UNA SERIE CONVERGENTE, LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE LA SERIE DE FUNCIONES

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3x^2+3}\right)^k$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN TODO $\mathbb{R}$.

A SU LÍMITE PUNTUAL $\frac{3x^2+3}{3x^2+2}$

2:] $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y(1+x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ES UNA E.D.O. DE 1: ORDEN DE VARIABLES SEPARADAS. INTEGREMOS LA

$$y'(x)\,y(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

INTEGRANDO RESPECTO DE x

$$\int_0^t y'(x)\,y(x)\,dx = \int_0^t 1 - \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^2(x)}{2}\Big|_0^t = x - Lg|1+x|\,\Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^2(t)}{2} - 1/2 = t - Lg|1+t|$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2(t) = 1 + 2t - Lg(1+t)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = \sqrt{1+2t-Lg(1+t)^2}$$

COMPROBACIÓN:
PARA $t=0$
$y(0)=1$; EL SIGNO DE LA RAÍZ CUADRADA TIENE QUE SER POSITIVO

3º] $y'' - 6y' + 10y = t^2$ ES UNA E.D.O LINEAL DE 2º ORDEN NO HOMOGÉNEA

LA E.D.O HOMOGÉNEA ASOCIADA ES

$y'' - 6y' + 10y = 0$ Y SU ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

ES $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} =$

$= 3 \pm i$

ESTAS RAÍCES $\lambda = 3 \pm i$ NOS DICEN QUE LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA

ES $y(t) = C_1 e^{3t}\cos t + C_2 e^{3t}\operatorname{sen} t.$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

EL TÉRMINO NO INDEPENDIENTE DEL PROBLEMA NO HOMOGÉNEO ES t^2 Y $\lambda = 0$ NO ES RAÍZ DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA, ASÍ PODEMOS PROBAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR $y_0(t) = At^2 + Bt + C.$

$y_0'(t) = 2At + B$

$y_0''(t) = 2A.$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN CON y_0

$2A - 6(2At + B) + 10(At^2 + Bt + C) =$

$= 10At^2 + (10B - 12A)t + (2A - 6B + 10C) = t^2$

ASÍ $10A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{10}}$

$-12A + 10B = 0$ $\quad -\frac{12}{10} = -10B \Rightarrow \boxed{B = \frac{12}{100}}$

$2A - 6B + 10C = 0$ $\quad$ Y $\frac{2}{10} - \frac{72}{100} = -10C \Rightarrow \boxed{\frac{52}{1000} = C}$

ASÍ LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA NO HOMOGÉNEO

ES $y(t) = \left(\frac{1}{10}t^2 + \frac{12}{100}t + \frac{52}{1000}\right) + C_1 e^{3t}\cos t + C_2 e^{3t}\operatorname{sen} t.$

$y'(t) = \frac{1}{5}t + \frac{12}{100} + 3C_1 e^{3t}\cos t - C_1 e^{3t}\operatorname{sen} t + 3C_2 e^{3t}\operatorname{sen} t + C_2 e^{3t}\cos t.$

LAS CONDICIONES INICIALES $y(0) = y'(0) = 0$ NOS LLEVAN AL SISTEMA

$0 = \frac{52}{1000} + C_1$

$0 = \frac{12}{100} + 3C_1 + C_2$

Y ASÍ $C_1 = -\frac{52}{1000}$

Y $C_2 = -\frac{12}{100} - \frac{156}{1000} = -\frac{276}{1000}$

LUEGO LA SOLUCIÓN PARTICULAR $y(0)=y'(0)=0$ ES

$$y(t) = \left(\frac{1}{10}t^2 + \frac{12}{100}t + \frac{52}{1000}\right) - \frac{52}{1000}e^{3t}\cos t - \frac{276}{1000}e^{3t}\operatorname{sen} t.$$

— · —

EN EL OTRO CASO SI $y(0)=y'(0)=1$, LLEGAMOS AL SISTEMA

$$1 = \frac{52}{1000} + C_1$$

$$1 = \frac{12}{100} + 3C_1 + C_2$$

Y ASÍ $C_1 = 1 - \frac{52}{1000} = \frac{948}{1000}$

Y $C_2 = 1 - \frac{12}{100} - \frac{2844}{1000} =$

$$= \frac{880}{1000} - \frac{2844}{1000} = -\frac{1964}{1000}$$

LUEGO LA SOLUCIÓN PARTICULAR $y(0)=y'(0)=1$

ES $$y(t) = \left(\frac{1}{10}t^2 + \frac{12}{100}t + \frac{52}{1000}\right) + \frac{948}{1000}e^{3t}\cos t - \frac{1964}{1000}e^{3t}\operatorname{sen} t.$$

4.) $b - a = 10^{36} + 1.072.773 - 10^{36} - 1.072.771 =$

$= 2$

m.c.d (a, b) DIVIDE A "b" Y A "a" POR TANTO

$m.c.d(a,b) \mid 2$

COMO a, y b SON IMPARES, 2 NO DIVIDE A "a" NI A "b", POR TANTO $m.c.d(a,b) = 1$.

A LA MISMA SOLUCIÓN SE LLEGA TAMBIÉN APLICANDO EL ALGORITMO DE EUCLIDES

5.) $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{35}$ ES UN GRUPO CON LA SUMA

$6 \in \mathbb{Z}_{15}$ Y $6 \times 5 = 6+6+6+6+6 = 30 \equiv 0 \mod 15$

LUEGO EL ORDEN DE 6 EN $\mathbb{Z}_{15}$ ES 5

$10 \in \mathbb{Z}_{35}$ $\quad m.c.m.(10, 35) = 2 \times 5 \times 7 = 70$

$10 = 2 \times 5$

$35 = 7 \times 5$

LUEGO EL ORDEN DE 10 EN $\mathbb{Z}_{35}$ ES 7

COMO $ord((6,10))$ TIENE QUE SER UN MÚLTIPLO DE 5 Y 7, $m.c.m(5,7) = 35$

LUEGO $ord((6,10)) = 35$

POR OTRO LADO $|\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{35}| = 15 \times 35 = 3 \times 5 \times 5 \times 7 =$

$= 3 \times 175 = 525$

ESTE GRUPO TIENE ORDEN 525. SI HUBIESE UN ELEMENTO DE ORDEN 525, EL GRUPO SERÍA CÍCLICO, PERO ESTO NO ES POSIBLE

$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{35} \cong \mathbb{Z}_{525}$ CÍCLICO $\Longleftrightarrow mcd(15,35) = 1$

Y ESTO ÚLTIMO NO ES ASÍ.

6] a) $p(x) = x^3+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$

Como $p(2) = 2^3+1 = 8+1 = 9 \equiv 0 \mod 3$

el polinomio $p(x)$ NO es irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$

y por tanto el anillo cociente

$\mathbb{Z}_3[x]/p$ NO es un cuerpo.

$q(x) = x^3+2x^2+x+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ tiene grado 3

$q(0) = 1 \neq 0$

$q(1) = 1+2+1+1 \equiv 2 \neq 0 \mod 3$

$q(2) = 2^3+2^3+2+1 \equiv 1 \neq 0 \mod 3.$

Como q no tiene raíces en $\mathbb{Z}_3$, q es irreducible

sobre $\mathbb{Z}_3$ y por tanto $\mathbb{Z}_3[x]/q$ es un cuerpo.

$\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{Z}_3[x]/q$ así $\operatorname{char} \mathbb{Z}_3[x]/q = 3$

$|\mathbb{Z}_3[x]/q| = 3^3 = 27$ elementos

y $[\mathbb{Z}_3[x]/q : \mathbb{Z}_3] = 3 = \operatorname{grad} q.$

Observemos que $\mathbb{Z}_3[x]/q = \{a_0 + a_1[x] + a_2[x]^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_3\}$

b) $x^2+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ es irreducible ya que
$0^2+1 = 1 \neq 0$
$1^2+1 = 2 \neq 0$
$2^2+1 = 2 \neq 0 \mod 3.$

Luego m.c.d.$(x^2+1, x^3+1) = 1$, lo que nos dice que

$x^2+1 \in \mathbb{Z}_3[x]/x^3+1$ es una unidad y tiene inverso.

Usemos el algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^2+1 \\ -x^3-x & x \\ \hline 2x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & 2x+1 \\ -x^2-2x & 2x+2 \\ \hline x+1 & \\ -x-2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

r_i	x^3+1	x^2+1	$2x+1$	2
q_i		x	$2x+2$	
α_i	1	0	1	$x+1$
β_i	0	1	$2x$	$2x^2+2x+1.$

Así $2 = (x^3+1)(x+1) + (x^2+1)(2x^2+2x+1)$

Luego $(x^2+1)^{-1} = x^2+x+2$ en $\mathbb{Z}_3[x]/x^3+1$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 2 \\ x^2 + 1 \\ \hline x^2 + x + 2 \\ x^4 + x^3 + 2x^2 \qquad \\ \hline x^4 + x^3 + 0 + x + 2 \end{array}$$

$x^3+1=0$, luego $x^4+x^3+x+2 = x^4+x+1 =$

$= x\underbrace{(x^3+1)}_{0}+1 = 1.$

— · —

En el otro caso $x^2+1 \in \mathbb{Z}_3[x]/_{x^3+2x^2+x+1}$

Como estamos ante un cuerpo y $x^2+1 \neq 0$, entonces necesariamente existe su inverso.

Usemos el algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+x+1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad\quad -x & x+2 \\ \cline{1-1} \quad 2x^2 \qquad +1 & \\ \quad -2x^2 \qquad -2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 2 & \end{array}$$

Luego por el teorema del resto

$(x^2+1)(x+2)+2 = x^3+2x^2+x+1$

Como $x^3+2x^2+x+1 \equiv 0$ se sigue que

$(x^2+1)(x+2) = -2 = 1$

Luego $(x^2+1)^{-1} = x+2$ en $\mathbb{Z}_3[x]/_{x^3+2x^2+x+1}$

Comprobación

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ x + 2 \\ \hline +2x^2 \quad +2 \\ + \quad +x^3 \quad +x \qquad \\ \hline x^3+2x^2+x+2 \end{array} = \underbrace{(x^3+2x+x+1)}_{0}+1 = 1$$