# EXAMEN FINAL: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

**12 de Septiembre de 2016**

**1.-** Demuestra la igualdad

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

(**Indicación:** considera la serie de Fourier de la función $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.)

**2.-** Resuelve el problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{y'}{x+1} - \dfrac{y}{x} = x \\ y'(0) = 3 \end{array}\right\}$$

**3.-** Dada la ecuación diferencial de segundo orden:

$$x'' + 2x' + 2x = 26e^{4t}$$

a) Calcula la solución general $x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
b) Calcula la solución que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
c) Calcula el límite de $x(t)$ para $t \to \infty$ para la expresión calculada en a).

**4.-** Resuelve el sistema de congruencias:

$$\left.\begin{array}{rcll} x & \equiv & 1 & \mod 3 \\ 2x & \equiv & 5 & \mod 11 \\ x & \equiv & 3 & \mod 7 \end{array}\right\}$$

**5.-** Sea $\mathbb{F}$ el cuerpo de 32 elementos. Halla un generador de $\mathbb{F}^*$ (el grupo de unidades de $\mathbb{F}$).

**6.-** Se considera la tabla de multiplicar del cuerpo de 9 elementos $\mathbb{F}_9$ :

| $(\mathbb{F}_9^*, \times)$ | $1$ | $2$ | $\alpha$ | $2\alpha$ | $1+\alpha$ | $1+2\alpha$ | $2+\alpha$ | $2+2\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $2$ | $\alpha$ | $2\alpha$ | $1+\alpha$ | $1+2\alpha$ | $2+\alpha$ | $2+2\alpha$ |
| $2$ | $2$ | $1$ | $2\alpha$ | $\alpha$ | $2+2\alpha$ | $2+\alpha$ | $1+2\alpha$ | $1+\alpha$ |
| $\alpha$ | $\alpha$ | $2\alpha$ | $2$ | $1$ | $2+\alpha$ | $1+\alpha$ | $2+2\alpha$ | $1+2\alpha$ |
| $2\alpha$ | $2\alpha$ | $\alpha$ | $1$ | $2$ | $1+2\alpha$ | $2+2\alpha$ | $1+\alpha$ | $2+\alpha$ |
| $1+\alpha$ | $1+\alpha$ | $2+2\alpha$ | $2+\alpha$ | $1+2\alpha$ | $2\alpha$ | $2$ | $1$ | $\alpha$ |
| $1+2\alpha$ | $1+2\alpha$ | $2+\alpha$ | $1+\alpha$ | $2+2\alpha$ | $2$ | $\alpha$ | $2\alpha$ | $1$ |
| $2+\alpha$ | $2+\alpha$ | $1+2\alpha$ | $2+2\alpha$ | $1+\alpha$ | $1$ | $2\alpha$ | $\alpha$ | $2$ |
| $2+2\alpha$ | $2+2\alpha$ | $1+\alpha$ | $1+2\alpha$ | $2+\alpha$ | $\alpha$ | $1$ | $2$ | $2\alpha$ |

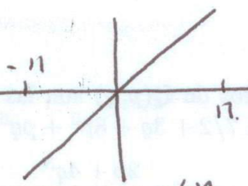
Se considera el polinomio $x^2 + (1+2\alpha) \in \mathbb{F}_9[x]$.
a) Comprueba que $x^2 + (1+2\alpha)$ es irreducible en $\mathbb{F}_9[x]$.
b) Encuentra el inverso de la clase $[x]$ en el cuerpo $\mathbb{F}_9[x]/x^2 + (1+2\alpha)$.

**La revisión del examen se efectuará el día 20 de Septiembre a las 16 horas en el aula 14. No es obligatorio asistir a la revisión.**

**Observaciones:** Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

1:] Sea $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$

Vamos a calcular la serie de Fourier de la función $f(x) = x$ de modo que



nos permita calcular la serie del enunciado.

Como $f(x) = x$ es una función impar en $[-\pi, \pi]$ se sigue que $a_0, a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx \underset{\text{partes}}{=} \frac{1}{\pi}\left[ \frac{-x \cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[ -\pi \cos n\pi - \pi \cos(-n\pi) \right] + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\left( \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Como $f(x) = x$ es derivable en $(-\pi, \pi)$, se tiene que $\forall x \in (-\pi, \pi)$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$$

En particular para $x = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} 0$

y también para $x = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}$$

Observemos que si $n$ es par $\operatorname{sen} 2k\frac{\pi}{2} = 0$

si $n$ es impar $\operatorname{sen}(2k+1)\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$

Luego

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{(2k+1)+1}}{2k+1}(-1)^k \iff$$

$$\iff \boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$$

2:) $\begin{cases} \dfrac{y'}{x+1} - \dfrac{y}{x} = x \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

LA E.D.O DE PRIMER ORDEN $\dfrac{y'}{x+1} - \dfrac{y}{x} = x$

LA TRANSFORMAMOS $\dfrac{y'}{x+1} = \dfrac{y}{x} + x \iff y' = \dfrac{x+1}{x} y + x^2 + x.$

QUE ES UNA E.D.O LINEAL DE PRIMER ORDEN NO HOMOGÉNEA.

RESOLVEMOS LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA $y' = \dfrac{x+1}{x} y$

$$\iff \frac{y'}{y} = 1 + \frac{1}{x}$$

INTEGRANDO $\displaystyle\int \frac{y'}{y}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x}\,dx$

$$\iff \ln|y(x)| = x + \ln|x| + k.$$

ASÍ $|y(x)| = e^k e^x e^{\ln|x|}$

$$\iff y(x) = k e^x x \quad k \in \mathbb{R}.$$

COMPROBACIÓN: $y'(x) = k e^x x + k e^x = \dfrac{x+1}{\cancel{x}} k e^x \cancel{x}$

CALCULEMOS AHORA POR EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O NO HOMOGÉNEA. ASÍ SI TOMAMOS

$$y_0(x) = k(x) e^x x.$$

$$y_0'(x) = k'(x) e^x x + k(x)\left[\cancel{e^x x + e^x}\right] =$$

$$= \cancel{\frac{x+1}{x} k(x) e^x x} + x^2 + x \quad \Rightarrow k'(x) = \frac{x+1}{e^x}$$

ASÍ $k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t+1}{e^t}\,dt$

LUEGO $y(x) = y_0(x) + k e^x x$ $\quad k \in \mathbb{R}$ ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN.

DERIVANDO $y'(x) = y_0'(x) + k e^x x + k e^x =$

$$= \frac{x+1}{e^x} e^x x + \left(\int_0^x \frac{t+1}{e^t}\,dt\right)\left[e^x x + e^x\right] + k e^x x + k e^x$$

SI NECESARIAMENTE $3 = y'(0) = k$

LUEGO LA ÚNICA SOLUCIÓN DEL ENUNCIADO ES.

$$\boxed{y(x) = \left(\int_0^x \frac{t+1}{e^t}\,dt\right) e^x x + 3 e^x x.}$$

3:] $x'' + 2x' + 2x = 26e^{4t}$

E.D.O LINEAL DE 2º ORDEN NO HOMOGÉNEA.

LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA ASOCIADA ES

$$x'' + 2x' + 2x = 0$$

EC. CARACTERÍSTICA $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} =$

$$= -1 \pm i$$

ASÍ $x(t) = Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\operatorname{sen} t \quad A, B \in \mathbb{R}$ ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O HOMOGÉNEA

COMO 4 NO ES RAÍZ DE LA EC. CARACTERÍSTICA PROBAREMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR

$y_0(t) = ke^{4t}$

$y_0'(t) = 4ke^{4t}$ ENTRANDO EN LA ECUACIÓN

$y_0''(t) = 16ke^{4t} \quad 16ke^{4t} + 8ke^{4t} + 2ke^{4t} = 26e^{4t}$

$26ke^{4t} = 26e^{4t} \Rightarrow k = 1$

ASÍ $\boxed{y(t) = y_0(t) + Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\operatorname{sen} t = e^{4t} + Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\operatorname{sen} t \quad A, B \in \mathbb{R}}$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O DEL ENUNCIADO

$y'(t) = 4e^{4t} - Ae^{-t}\cos t - Ae^{-t}\operatorname{sen} t - Be^{-t}\operatorname{sen} t + Be^{-t}\cos t$

b) SI $y(0) = y'(0) = 1$, ENTONCES

$1 = 1 + A \qquad$ ASÍ $A = 0$ Y

$1 = 4 - A + B \qquad B = -3$

LUEGO LA SOLUCIÓN PARTICULAR QUE CUMPLE $y(0) = y'(0) = 1$

ES LA FUNCIÓN $y(t) = e^{4t} - 3e^{-t}\operatorname{sen} t$.

c) NO EXISTE TAL LÍMITE YA QUE

$$\lim_{t\to\infty} e^{4t} + Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\operatorname{sen} t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{4t} + \lim_{t\to\infty} Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\operatorname{sen} t = \lim_{t\to\infty} e^{4t} + 0 = \infty$$

4:]

$x \equiv 1 \mod 3$

$2x \equiv 5 \mod 11$

$x \equiv 3 \mod 7$

3, 11 y 7 son primos.

$$\iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 5 \times 2^{-1} \mod 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 8 \mod 11 \end{cases}$$

$2^{-1} = 6 \mod 11$

$5 \times 6 = 30 \equiv 8 \mod 11$

Ahora estamos en condiciones de aplicar el teorema chino del resto, y así

$x = 1 \times 77 \times 2 + 3 \times 33 \times 3 + 8 \times 21 \times 10 =$

$77^{-1} \equiv 2 \mod 3$ $\quad 33 \equiv 3 \mod 7$ $\quad 10^{-1} \equiv 10 \mod 11$

$= 154 + 297 + 1680 \equiv 2131 \mod 3 \times 7 \times 11 = 231$

$\equiv 52 \mod 231$

$2131 \div 231 = 9$, resto $52$

Comprobación

$52 \div 3 = 17$, resto $1$ $\quad 104 \div 11 = 9$, resto $5$ $\quad 52 \div 7 = 7$, resto $3$

5:] Sea $\mathbb{F}_{32}$ el cuerpo de $32 = 2^5$ elementos y su grupo multiplicativo

$(\mathbb{F}_{32}^*, \times) = (\mathbb{F}_{32} \setminus \{0\}, \times)$ como $|\mathbb{F}_{32} \setminus \{0\}| = 31$

o de unidades.

Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\forall \alpha \in \mathbb{F}_{32}^* \setminus \{1\}$ $\alpha^k = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \mid 31$ como 31 es primo, todo elemento de $\mathbb{F}_{32}^*$ menos el 1 es primitivo ó bien que genera el grupo.

6:

SI MIRAMOS LA DIAGONAL DE LA TABLA NO EXISTE NINGÚN ELEMENTO $a \in \mathbb{F}_9^*$ TAL QUE $a^2 = -(1+2\alpha) = 2+\alpha$

(ES CLARO QUE $\mathrm{Char}\, \mathbb{F}_9 = 3$, LUEGO $\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{F}_9$ Y $-1 = 2$ Y $-2 = 1$.)

LUEGO EL POLINOMIO DE GRADO 2 $x^2+(1+2\alpha) \in \mathbb{F}_9[x]$ NO TIENE RAÍCES EN $\mathbb{F}_9$ Y POR TANTO ES UN POLINOMIO IRREDUCIBLE.

ASÍ $\mathbb{F}_9[x]/x^2+(1+2\alpha)$ ES UN CUERPO DE

$$9^2 = (3^2)^2 = 3^2 = 81 \text{ ELEMENTOS}$$

b) PARA CALCULAR EL INVERSO DE $[x]$ EN $\mathbb{F}_9[x]/x^2+(1+2\alpha)$ PODEMOS APLICAR EL ALGORITMO DE EUCLIDES O DE FORMA MÁS SENCILLA

$$x^2 + (1+2\alpha) = 0$$

$$\iff x^2 = -(1+2\alpha)$$

$$\iff [x]\cdot[x] = 2+\alpha$$

MIRANDO LA TABLA $(2+\alpha)^{-1} = (1+\alpha)$

ASÍ $[x]\,(1+\alpha)\,[x] = (2+\alpha)(1+\alpha) = 1$

LUEGO $\boxed{[x]^{-1} = x + \alpha x.}$