AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen final: 5 de septiembre de 2014

1.- Se considera la sucesión de funciones $f_n(x) = \lg\left[\left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right)^n\right]$ para $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Se pide estudiar la convergencia uniforme de la sucesión en un intervalo $[a, b]$ con $a \in (0, 1)$ y $b \in (1, 2)$.

2.- Calcula la serie de Fourier de la función $f(t) = 2 - |x|$ en el intervalo $[-2, 2]$. Utiliza el resultado para calcular:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

3.- Sea $f(t)$ es una función real definida en el intervalo $[0, \infty)$, con $\mathcal{L}f(s)$ su transformada de Laplace, comprueba que, para $a > 0$ constante, la transformada de Laplace de $f(at)$ con respecto a t es $\frac{1}{a}(\mathcal{L}f)\left(\frac{s}{a}\right)$.

i) Aplica esta propiedad para concluir que $\mathcal{L}\left(\text{sen}\left(\sqrt{2}t\right)\right)(s) = \frac{\sqrt{2}}{2+s^2}$.

ii) Aplica **i)** a la resolución del problema de valor inicial

$$y'' + y = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\sqrt{2}t\right) \qquad y(0) = 10, y'(0) = -1\,.$$

Indicación: Es más importante hacer los apartados **i** y **ii**, aunque no se demuestre la propiedad. Incluso se puede empezar por el último apartado asumiendo válido el anterior.

4.- Calcula el resto de dividir $(2^{37})^{173}$ entre 39.

5.- Considera la aplicación $\phi : \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{140}$, dada por

$$\phi([a]_7, [b]_{20}) = [20a + 7b]_{140}$$

a) Muestra que si $a \equiv a' \pmod 7$ y $b \equiv b' \pmod{20}$ entonces

$$20a + 7b \equiv 20a' + 7b' \pmod{140}$$

Es decir, que la aplicación está bien definida.

b) Comprueba que ϕ es un isomorfismo de grupos con respecto a la suma.

6.- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p[x]/(x^3 + x^2 + 2x + a)$. Elige p y a para que $\mathbb{K}$ sea un cuerpo de 27 elementos. Halla el inverso de $[x^2 + 2]$ en $\mathbb{K}$.

Observaciones:

.- En el examen sólo se puede utilizar papel y bolígrafo

.- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.

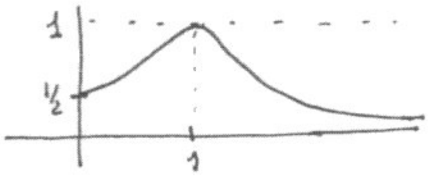
.- Cada pregunta se puntua con un máximo de 1,5 puntos.

.- La **revisión del examen** será el próximo jueves 11 de Septiembre a las 11h en el aula 11.

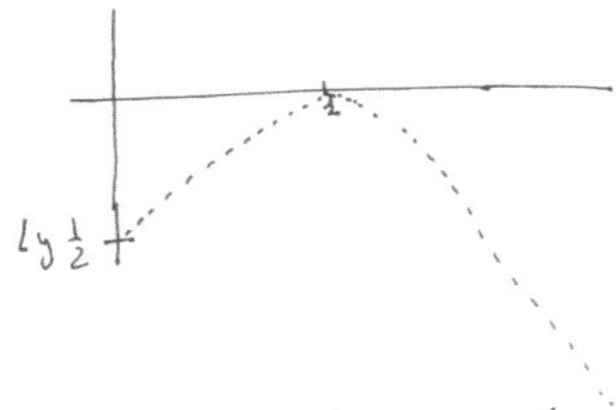
PROBLEMA Sea $f_n(x) = \lg\left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right)^n =$

$$= n \lg\left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right).$$

La función $\frac{1}{1+(x-1)^2}$ $x>0$ tiene por gráfica



Luego $\lg\left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right) \le 0$ $\forall x>0$ y tiene por gráfica



Luego el límite puntual de la sucesión f_n es

si $x=1$ $f_n(1)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y así $\lim_{n\to\infty} f_n(1)=0$

si $x>0, x\neq 1$ $f_n(x) = n \lg\left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

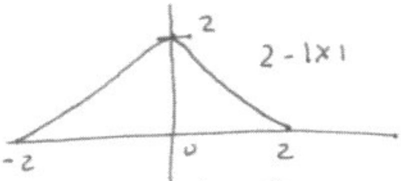
Luego el límite puntual sólo existe para $x=1$

— o —

Dado que la convergencia uniforme $f_n \to f$ en $[a,b]$, $a<1$, $b>1$, implica la convergencia puntual a f, como ésta no se produce, no hay convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_n$ en ningún intervalo de la forma $[a,b]$ dado en el enunciado.

PROBLEMA Sea $f(x) = 2 - |x|$, $x \in [-2,2]$.

La gráfica de f es



$2-|x|$ función par.

Como f es par sus coeficientes "b_n" de Fourier son nulos. Ahora

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{2}{4}\,4 = 2$$

área de un triángulo

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{2\pi n x}{4}\,dx$$

$f(x)\cos\frac{\pi}{2}nx$ par

$$= \frac{4}{4}\int_0^2 (2-x)\cos\frac{\pi}{2}nx\,dx =$$

$$= 2\int_0^2 \cos\frac{\pi}{2}nx\,dx - \int_0^2 x\cos\frac{\pi}{2}nx\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}nx\Big|_0^2 - \int_0^2 x\cos\frac{\pi}{2}nx\,dx =$$

partes

$$-\left[\frac{2x}{\pi n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}nx\Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}nx\,dx = \frac{-4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi}{2}nx\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{-4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\pi n x - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{8}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Así la serie de Fourier de f es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2}(2k+1)x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}\cos\frac{\pi}{2}(2k+1)x$$

Como f es continua y $\exists\, f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ se sigue que $f(0) = 2 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}$ y despejando

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

PROBLEMA

SEA $h(t) = f(a \cdot t)$

$$\mathcal{L}\, h(s) = \int_0^\infty h(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty f(a\cdot t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(at)\, e^{-s(at)\frac{1}{a}}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty f(x)\, e^{-\frac{s}{a}x} \frac{1}{a}\, dx =$$

CAMBIO DE VARIABLE

$x = a t$

$dx = a\, dt$

SI $t = 0 \Rightarrow x = 0$

SI $t = \infty \Rightarrow x = \infty$

$$= \frac{1}{a} \int_0^\infty f(x)\, e^{-\frac{s}{a}x}\, dx = \frac{1}{a} (\mathcal{L} f)\left(\frac{s}{a}\right)$$

POR TANTO SI $f(t) = \operatorname{sen} t$

$$\left(\mathcal{L} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t)\right)(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{L} \operatorname{sen} t)\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) =$$

USANDO LA TABLA

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2\left(\frac{s^2}{2} + 1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}$$

LA EDO LINEAL DE 2 ORDEN

$$\begin{cases} y'' + y = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t) \\ y(0) = 10, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

APLICANDO TRASFORMADAS DE LAPLACE QUEDA

$$s^2 \mathcal{L}y(s) - s\, y(0) - y'(0) + \mathcal{L}(y)(s) = \sqrt{2}\, \mathcal{L}(\operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t))(s) =$$

$$= \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{s^2+2} = \frac{2}{s^2+2}$$

Y ASÍ $(s^2+1)\mathcal{L}y(s) - 10s + 1 = \frac{2}{s^2+2}$

LUEGO $\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s^2+1}\left[\frac{2}{s^2+2} + 10s - 1\right] = \frac{1}{s^2+1}\left[\frac{2 + 10s^3 - s^2 + 20s - 2}{s^2+2}\right] =$

$$= \frac{1}{s^2+1}\left[\frac{s\left[10s^2 - s + 20\right]}{s^2+2}\right] = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2}$$

SEPARACIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.

ASÍ $\quad (As+B)(s^2+2) + (Cs+D)(s^2+1) = 10s^3 - s^2 + 20s$

Por tanto $\quad As^3 + Bs^2 + 2As + 2B +$

$\quad + Cs^3 + Ds^2 + Cs + D =$

$\quad = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (2A+C)s + (2B+D) = 10s^3 - s^2 + 20s$

Luego
$$\left.\begin{array}{llll} A & + C & & = 10 \\ & B & + D & = -1 \\ 2A & + C & & = 20 \\ & 2B & D & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 10 \text{ y } C = 0 \\ \text{y} \\ B = 1 \text{ y } D = -2 \end{array}$$

Luego
$$\mathcal{L}\, y(s) = \frac{10s+1}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+2}$$

Usando las tablas y el apartado primero

$$y(t) = 10\cos t + \operatorname{sen} t - \sqrt{2}\, \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t)$$

<u>COMPROBACIÓN</u>:

$y(0) = 10$

y $y'(t) = -10 \operatorname{sen} t + \cos t - 2\cos\sqrt{2}\, t$

ASÍ $\quad y'(0) = 1 - 2 = -1$

PROBLEMA El 39 se descompone como

$$39 = 13 \times 3$$

Así su función de Euler $\varphi(39) = 12 \times 2 = 24$

Luego $\forall a \in \mathbb{N}$ con $m.c.d(a, 39) = 1 \Rightarrow$

$$a^{\varphi(39)} \equiv 1 \mod 39$$

Como 2^n y 39 son primos entre sí $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(2^{37}\right)^{173} = \left(2^{24+13}\right)^{173} = \left(2^{24}\right)^{173} \cdot \left(2^{13}\right)^{173} \equiv 2^{13 \times 173} \mod 39$$

Ahora $\begin{array}{r|l} 173 & 24 \\ \hline 05 & 7 \end{array}$, así

$$2^{13 \times (24 \times 7 + 5)} = \left(2^{24}\right)^{13 \times 7} \cdot 2^{13 \times 5} \equiv 2^{13 \times 5} \mod 39$$

$$65 = 13 \times 5 = 48 + 17$$

Luego $2^{13 \times 5} = 2^{17} \mod 39$

$$2^{17} = 2^5 2^5 2^5 \cdot 4 = (-7)^3 \times 4 = -(31) \times 4 = 8 \times 4 = 32 \mod 39$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 7 \\ \hline 343 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 343 & 39 \\ \hline 31 & 8 \end{array}$$

PROBLEMA Sean los grupos aditivos $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{20}$ y $\mathbb{Z}_{140}$

Como m.c.d $(7,20) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{20}$ es un grupo cíclico y por tanto isomorfo a $\mathbb{Z}_{140}$

Caso Ψ $\mathbb{Z}_{140} \longrightarrow \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{20}$ es un

$[x]_{140} \longrightarrow ([x]_7, [x]_{20})$

isomorfismo.

El problema es ver que

$$\phi \quad \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{140} \text{ es otro isomorfismo}$$

$$\phi([a]_7 [b]_{20}) = [20a + 7b]_{140}$$

Veamos

1:) ϕ está bien definido

Sea $a \equiv a' \mod 7 \Rightarrow a' = k_1 7 + a.$

y $b \equiv b' \mod 20 \Rightarrow b' = k_2 20 + b$

Luego $[20a' + 7b']_{140} = [20(k_1 7 + a) + 7(k_2 20 + b)]_{140} =$

$= [140k_1 + 140k_2 + 20a + 7b]_{140} = [20a + 7b]_{140}.$

Luego $([a]_7 [b]_{20}) = ([a']_7, [b']_{20}) \Rightarrow$

$\phi([a]_7 [b]_{20}) = \phi([a']_7, [b']_{20}).$

2:) ϕ es un homomorfismo.

$\phi(([a_1]_7 [b_1]_{20}) + ([a_2]_7, [b_2]_{20})) = \phi([a_1 + a_2]_7 [b_1 + b_2]_{20}) =$

$= [20(a_1 + a_2) + 7(b_1 + b_2)]_{140} = [20a_1 + 7b_1]_{140} + [20a_2 + 7b_2]_{140} =$

$= \phi([a_1]_7 [b_1]_{20}) + \phi([a_2]_7 [b_2]_{20}).$

3:) $([1]_7, [1]_{20})$ es un generador de $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{20}$, ya que es cíclico y el orden de $([1]_7 [1]_{20})$ es 140

Como $\phi([1]_7 [1]_{20}) = [20 + 7]_{140} = [27]_{140}$ y m.c.d $(27, 140) = 1$ se sigue que el orden de 27 en $\mathbb{Z}_{140}$ es 140, es por tanto un generador; luego ϕ es biyectiva y por tanto un isomorfismo.

PROBLEMA Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p[x] / (x^3+x^2+2x+a)$

Para que $\mathbb{K}$ sea un cuerpo de 27 elementos es necesario y suficiente con que $p=3$ y $x^3+x^2+2x+a \in \mathbb{Z}_3[x]$ sea irreducible sobre $\mathbb{Z}_3$. Si fuese de reducible el polinomio tendría una raíz en $\mathbb{Z}_3$

$$f(x) = x^3+x^2+2x+a$$

Como
$$f(0) = a$$
$$f(1) = 1+a$$
y
$$f(2) = 8+4+4+a = 1+a$$

luego a sólo necesariamente $a \neq 0$ y $a \neq 2$; puede valer $\boxed{a=1}$

Así $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3[x] / x^3+x^2+2x+1$ es un cuerpo de 27 elementos ya que x^3+x^2+2x+1 es irreducible sobre $\mathbb{Z}_3[x]$.

Sea $x^2+2 \in \mathbb{K}$ tenemos que hallar $(x^2+2)^{-1}$ usando el algoritmo de Euclides y el lema de Bézout

x^3+x^2+2x+1		1	0
x^2+2		0	1
2	$x+1$	1	$(-x-1)$

$$\begin{array}{rr|l} x^3+x^2+2x+1 & & x^2+2 \\ -x^3 \quad -2x & & x+1 \\ \hline x^2 \quad +1 & & \\ -x^2 \quad -2 & & \\ \hline 2 & & \end{array}$$

Luego $2 = x^3+x^2+2x+1 + (x^2+2)(2x+2)$

y así $(x^2+2)^{-1} = 2^{-1}(2x+2) =$
$= 2(2x+2) = x+1$.

Comprobación:
$(x^2+2)(x+1) = x^3+x^2+2x+2 = x^3+x^2+2x+1+1 =$
$= 1$.