ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

GRÁFICAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Se pueden representar ”gráficas” de funciones con más variables, si estas no son muchas claro. Para ello veremos que es necesario conocer lo que hemos visto sobre gráficas de funciones de una variable. Antes de empezar con problemas más complejos repasemos algo sobre curvas planas.

La gráfica de una función real de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la pintamos en el plano

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R} \}.$$

En Geometría Elemental hemos aprendido a representar algunas curvas planas. La más fácil es la **recta**:

$$ax + by = d, \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Si $b \neq 0$, podemos despejar y escribir

$$y = -\frac{x}{b} + \frac{d}{b},$$

lo cuál es una gráfica que es fácil de representar.

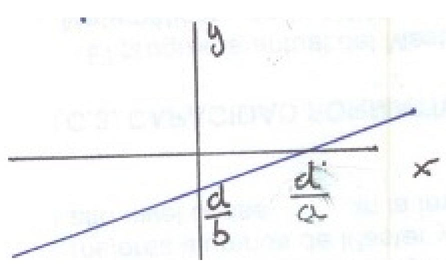

Figura 1. Recta en el plano.

Las cónicas. Las curvas planas que vienen dadas por polinomios de segundo grado en dos variables son las **cónicas.** En su forma reducida o canónica son

- **La Elipse**: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Despejando,

$$y=\pm\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})b^2}\quad \text{para} \quad x\in[-a,a].$$

Más adelante representaremos estas dos gráficas y nos saldrá la elipse

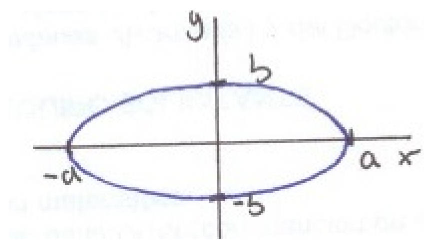

Figura 2. Elipse.

- **La Hipérbola**: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Despejando,

$$y=\pm\sqrt{(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2}\quad \text{para} \quad |x|\geq a.$$

Más adelante podremos representar estas dos gráficas y nos saldrá la hipérbola. Observemos que si podemos calcular ya sus asíntotas:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{x^2}}=\frac{a}{b}.$$

y

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2}-\frac{a}{b}x=\lim_{x\to\infty}\frac{b^2}{\sqrt{(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2}+\frac{a}{b}x}=0.$$

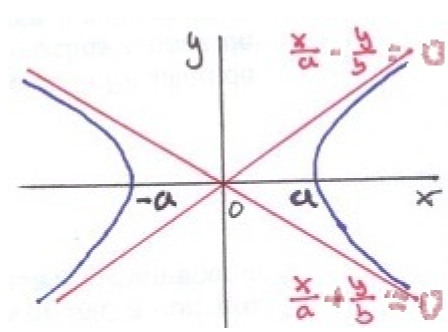

Figura 3. Hipérbola.

- **La Parábola**: $ay+bx^2=1$. Despejando, si $a\neq 0$

$$y=\frac{-b}{a}x^2+\frac{1}{a}\quad \text{para} \quad |x|\in\mathbb{R}.$$

Más adelante representaremos esta gráfica y nos saldrá la parábola:

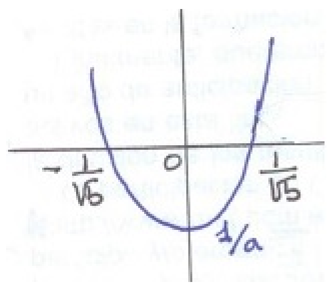

FIGURA 4. Parábola.

Curvas Paramétricas.

Vamos a considerar funciones de una variable pero que toman valores en $\mathbb{R}^n$.

Definición. 1. *Una **curva paramétrica** en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, es toda función*

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & : & [a,b] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n & & \\ & & t & \to & \gamma(t) & = & (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ...\gamma_n(t)). \end{array}$$

donde $\gamma_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas de una variable para todo $k = 1, 2, .., n$.

Definición. 2. *Llamamos, formalmente, **curva** en $\mathbb{R}^n$ a todo subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ de modo que es la imagen de una curva paramétrica γ. A la función γ se le llama **parametrización** de la curva.*

Si nos límitamos a pensar en el plano o el espacio, una curva no es más que un camino o trayectoria. En estas bajas dimensiones podemos esperar pintar las trayectorias. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. 1. *Consideramos la curva paramétrica en $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & : & [0,2\pi] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & & t & \to & \gamma(t) & = & (a\cos t, b \operatorname{sen} t) \end{array} \quad \textit{con} \quad a, b > 0.$$

Esta función γ está definida por dos funciones reales de una variable real $\gamma_1(t) = a\cos t$ y $\gamma_2(t) = b \operatorname{sen} t$. ¿Cómo pintamos la curva o trayectoria que representa γ?

Demostración: Tenemos que representar el conjunto

$$C = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = \gamma_1(t), y = \gamma_2(t) \quad \text{para todo} \quad t \in [0, 2\pi] \,\}.$$

Parece claro que primero debemos saber como se comportan las funciones coordenadas γ_1 y γ_2 antes de pasar a representar C. Así γ_1 es

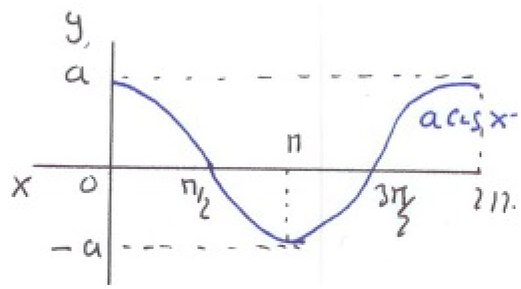

FIGURA 5. Gráfica de γ_1.

□

Y γ_2 es

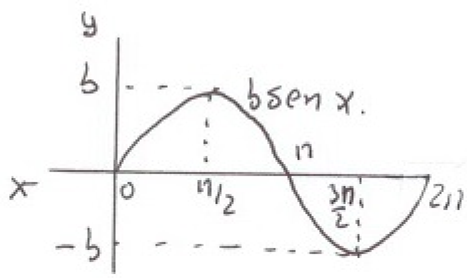

FIGURA 6. Gráfica de γ_2.

Viendo el comportamiento de estas dos gráficas podemos razonablemente ver que C es

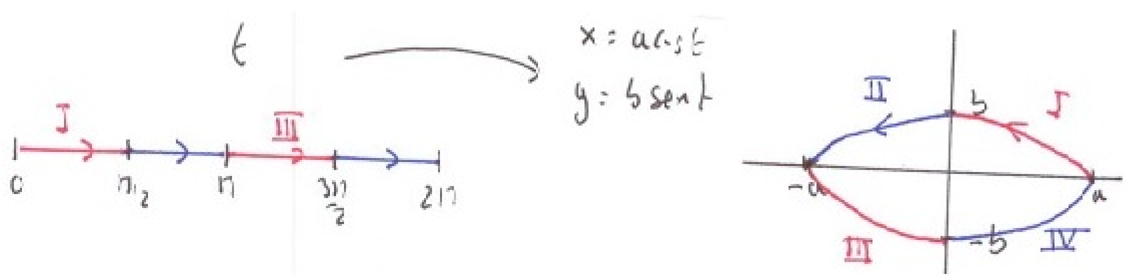

FIGURA 7. Paramétrización de la Elipse.

□

Observemos que para para resolver este problema en dos variables necesitamos resolver las gráficas de dos funciones de una variable.

Gráfica de un Potencial.

Consideraremos ahora funciones respecto de n variables y cuya imagen está en $\mathbb{R}$, funciones

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2, .., x_n) & \to & f(x_1, x_2, .., x_n). \end{array}$$

A veces estas funciones se les llama potenciales. Podemos definir lo que entendemos por la gráfica de estos potenciales.

Definición. 3. *Dado una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama gráfica de la función al conjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$*

$$Graff = \{\, (x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ (x_1, x_2, ..., x_n) \in Domf \,\}.$$

Si pensamos en funciones de dos variables

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & \\ & & (x, y) & \to & f(x, y) & = & z \end{array}$$

las gráfica de estas funciones, $z = f(x, y)$, parece posible que las podamos pintar en $\mathbb{R}^3$.

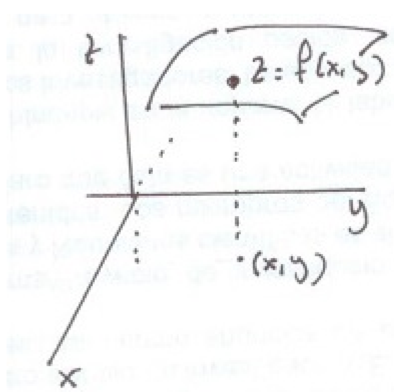

FIGURA 8. Gráfica de una función.

Lo que obtenemos son **superficies** en $\mathbb{R}^3$. Para pintar estas superficies veamos que necesitamos representar varias gráficas de funciones de una variable. Un ejemplo nos aclarará lo que decimos.

Ejemplo. 2. *Queremos representar en $\mathbb{R}^3$ la superficie que viene dada por la función en dos variables $z = ax^2 + by^2$ con $a, b > 0$.*

Demostración: Esta función $f(x, y) = ax^2 + by^2$ está definida en todo el plano $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, como $f(x, y) \geq 0$, z solo puede ser positiva. Si tomamos $z = k$ constante, entonces tenemos que $k = ax^2 + by^2$ y esto lo podemos reconocer, es un elipse en el plano $z = k$

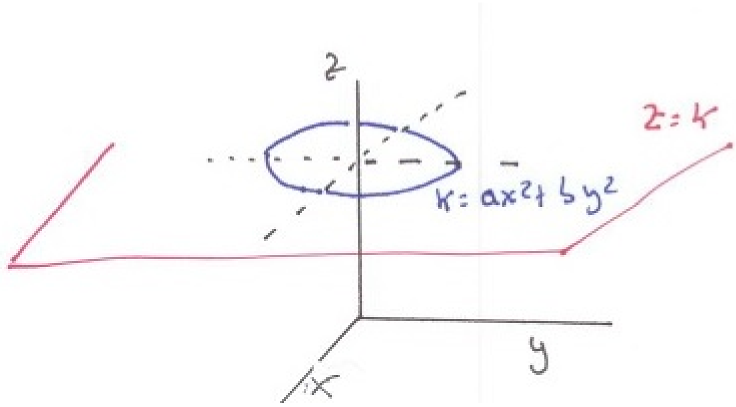

Figura 9. Curva de nivel para $z = k$.

Si cortamos nuestra superficie, sea la que sea, con el plano $x = 0$, entonces $z = by^2$; así encontramos una parábola en el plano $x = 0$,

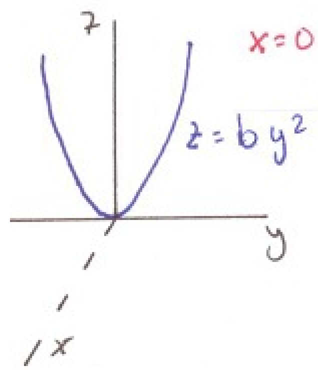

Figura 10. Curva de nivel para $x = 0$.

Si hacemos algo análogo cortando con el plano $y = 0$, tenemos que $z = ax^2$

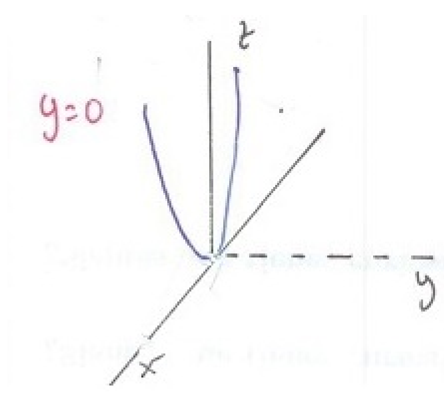

Figura 11. Curva de nivel para $y = 0$.

Con toda esta información, incluso con más si hacemos más cortes (**curvas de nivel**) a nuestra superficie con planos del tipo $x = k$, $y = k$ y $z = k$, nos convenceremos que nuestra superficie es algo como

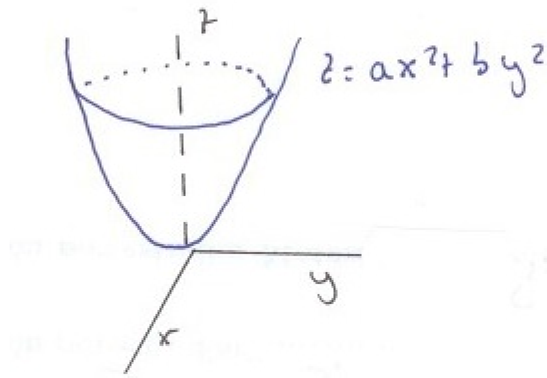

Figura 12. Paraboloide.

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es