ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN FUNCIONES CONTINUAS.

Las funciones continuas definidas sobre intervalos cerrados de la recta real alcanza siempre un máximo y un mínimo. Las definiciones precisas son las siguientes.

Definición. 1. *Sea una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida sobre un trozo de la recta real.*

A: *Decimos que f está **acotada** si existe $M > 0$ de modo que*

$$|f(x)| < M \quad \textit{para todo} \quad x \in A.$$

B: *Decimos que f tiene un **máximo** en el punto $x = x_0 \in A$ si*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{para todo} \quad x \in A.$$

C: *Decimos que f tiene un **mínimo** en el punto $x = x_1 \in A$ si*

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in A.$$

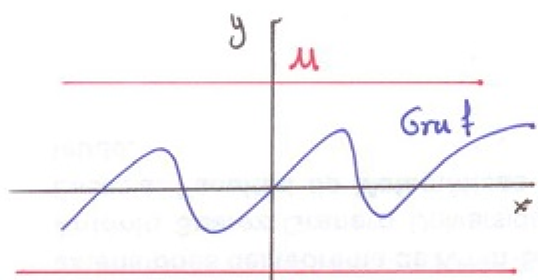

FIGURA 1. Función acotada.

En el caso de que f sea continua y esté definida sobre un intervalo cerrado, esta función alcanza un máximo y un mínimo.

Teorema. 1. *Sea una función continua $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real. Entonces*

A: *f está* ***acotada****.*

B: *f alcanza al menos un punto de* ***máximo*** *en $[a,b]$.*

C: *f alcanza al menos un punto de* ***mínimo*** *en $[a,b]$.*

Demostración:

A: Supongamos que f no está acotada. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ debe de existir un $x_n \in [a,b]$ de modo que $|f(x_n)| > n$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (ver apuntes sobre Subsucesiones) tiene que existir una subsucesión $(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} x$ con $x \in [a,b]$. Como f es continua y por la caracterización de la continuidad por sucesiones se tiene que

$$f(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} f(x),$$

pero por la definición de la sucesión $f(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} \infty$. Llegamos a contradicción por suponer que f no está acotada. Por tanto lo está.

B: Ejercicio, se hace de forma análoga a como procedemos a continuación.

C: f es una función acotada. Si consideramos el conjunto de $\mathbb{R}$

$$A = \{ f(x) \in \mathbb{R} \ : \ x \in [a,b] \},$$

este es un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Entonces existe $\beta = \inf A$. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\text{existe} \quad x_n \in [a,b] \quad \text{de modo que} \quad \beta \leq f(x_n) < \beta + \frac{1}{n},$$

donde solo hemos usados las propiedades de los ínfimos.

De nuevo por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (ver apuntes sobre Subsucesiones) tiene que existir una subsucesión $(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} x$ con $x \in [a,b]$. Como f es continua y por la caracterización de la continuidad por sucesiones se tiene que

$$f(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} f(x)$$

Por otro lado $f(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} \beta$, por la definición de la sucesión. Ahora por la unicidad del límite se sigue que

$$f(x) = \beta,$$

así x es el mínimo que buscabamos.

□

Ejemplo. 1. *Sea la función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Es una función continua en todo su dominio y además*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad y \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

Esta función no esta acotada, no alcanza un máximo ni tampoco un mínimo (fijemosnos que $1 \notin (0,1)$).

Observemos que esta misma función $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en el intervalo $[2,3]$ alcanza su máximo en $x = 2$ y su mínimo en $x = 3$.

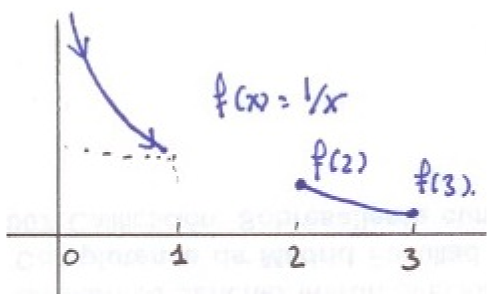

Figura 2. Máximos y mínimos.

Observación. 1. *Un Teorema como el anterior se puede dar sustituyendo el intervalo cerrado $[a,b]$ por un conjunto K compacto (ver apéndice sobre la Topología de la Recta).*

Muchos problemas de Matemática Aplicada tienen que ver con optimizar funciones, es decir encontrar máximos o mínimos de tales funciones. La continuidad junto con la compacidad son dos herramientas poderosas en los problemas de optimización.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es