ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

Al enfrentarnos con el problema de representar la gráfica de una función, la determinación del dominio de la misma y la parte del mismo donde es continua, así como el cálculo de los límites en los extremos del dominio (de aquí saldrán las asíntotas) nos dan una idea bastante cercana a lo que será la gráfica definitiva. En muchos casos, con estos datos tendremos suficiente información sobre la función con la que nos toque tratar.

Veamos algunos ejemplos para aclarar lo enunciado arriba.

Ejemplo. 1. *Nos dan la función* $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ *para* $x \in [-3, 2]$. *Nos piden determinar si esta acotada, si tiene máximo y mínimo. Y hacer un boceto de su gráfica.*

Demostración: Claramente $\mathrm{Dom} f = [-3, 2] \backslash \{-2\}$ y aquí la función es continua (f es división de funciones continuas y el denominador se anula para $x = -2$). Calculemos los límites de la función en los extremos de su dominio.

- Como f es continua en -3 y 2 tenemos que $f(-3) = 0$ y $f(2) = \frac{5}{4}$.
- $\lim_{x \to -2^-} \frac{x+3}{x+2} = -\infty$.
- $\lim_{x \to -2^+} \frac{x+3}{x+2} = \infty$.

Para determinar los límites anteriores, dado que el denominador tiende a cero y el númerador no se anula, es determinante examinar el **signo** de la función. Así

- Si $x \in [-3, -2)$ se tiene que $f(x) = \frac{x+3}{x+2} \leq 0$.
- Si $x \in [-2, 2]$ se tiene que $f(x) = \frac{x+3}{x+2} > 0$.

Luego la gráfica de la función será del tipo

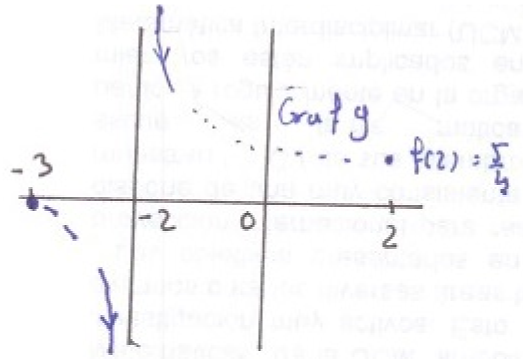

Figura 1. Gráfica de la función.

Con los datos disponibles podemos decir que la función no está acotada. Por tanto no tiene máximo o mínimo. Sin embargo si tiene dos **mínimos relativos** en $x = -3$ y en $x = 2$ (son mínimos en un entorno de cada uno de ellos; para la definición precisa ver el próximo Tema).

$\square$

Ejemplo. 2. *Nos dan la función* $f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. *Nos piden determinar si está acotada, si tiene máximo y mínimo. Y hacer un boceto de su gráfica.*

Demostración: Claramente $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ y aquí la función es continua (f es división de funciones continuas y el denominador no se anula). Calculemos los límites de la función en los extremos de su dominio.

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1.$

Así en $y = -1$ tenemos una asíntota horizontal. Como $|1-t^2| \leq 1+t^2$, para todo t, la gráfica de la función queda por encima de la asíntota. Por otro lado, el **signo** de la función es,

- si $t \in [-1,1]$, $f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \geq 0.$
- Si $t \notin [-1,1]$ se tiene que $f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} < 0.$
- $f(0) = 1 \geq \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Luego la gráfica de la función será del tipo

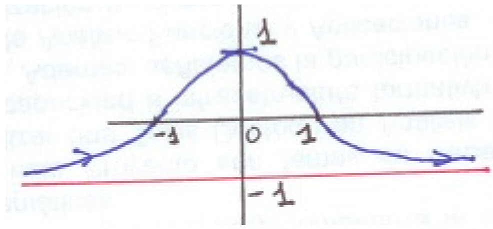

FIGURA 2. Gráfica de la función.

Por tanto la función está acotada, no tiene mínimo, pero si un máximo en $x = 0$. Además la función es **par,** es decir $f(-x) = f(x)$ o lo que es lo mismo su gráfica es simétrica respecto del eje de las y's. $\square$

Ejemplo. 3. *Nos dan la función* $f(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$. *Nos piden determinar si está acotada, si tiene máximo y mínimo. Y hacer un boceto de su gráfica.*

Demostración:

Claramente Dom$f = \mathbb{R}$ y aquí la función es continua (f es división de funciones continuas y el denominador no se anula). Calculemos los límites de la función en los extremos de su dominio.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 0.$

Así en $y = 0$ tenemos una asíntota horizontal. Por otro lado, el **signo** de la función es,

- si $t < 0$, $f(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} < 0.$
- Si $t > 0$ se tiene que $f(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} > 0.$
- $f(0) = 0.$

Luego la gráfica de la función será del tipo

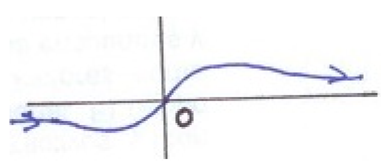

FIGURA 3. Gráfica de la función.

Por tanto la función está acotada. Queda por debajo de la asíntota cuando $t \to -\infty$ y por encima cuando $t \to \infty$. De la foma de la gráfica se deduce que al menos tiene que tener un mínimo, para un t negativo. Y como la función es **impar,** es decir $f(-x) = -f(x)$ o lo que es lo mismo su gráfica es simétrica respecto del punto $(0,0)$, deberá tener un máximo para algún t positivo. $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`