AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

SUBGRUPOS NORMALES.

La noción de **subgrupo normal** es una forma equivalente a la de **congruencia** para construir el **grupo cociente**. Veámoslo.

Definición 1. *Dado un grupo $(\mathbb{G}, *)$ y un subgrupo N de $\mathbb{G}$, decimos que el subgrupo es **normal** si para todo $m \in N$ y para todo $g \in \mathbb{G}$ se verifica que*

$$g * m * g^{-1} \in N.$$

O equivalentemente podemos escribir que $gN = Ng$ para todo $g \in \mathbb{G}$, donde

$$gN = \{gm \in \mathbb{G} \ : \ m \in N \ \}.$$

Ejemplo 1. *Todo subgrupo de un grupo abeliano es normal.*

Claro, $g * m * g^{-1} = g * g^{-1} * m = e * m = m$, luego si $m \in N \trianglelefteq \mathbb{G}$, se tiene que

$$g * m * g^{-1} \in N \qquad \text{para todo} \qquad g \in \mathbb{G} \ \square$$

Ejemplo 2. *Sea T una aplicación entre dos grupos $T : \mathbb{G} \to H$ de modo que $T(g * g') = T(g) * T(g')$ para todo $g, g' \in \mathbb{G}$. Observemos que estamos llamado igual a las operaciones de $\mathbb{G}$ y H. Más adelante diremos que T es un homomorfismo de grupos. Sea*

$$kerT = \{g \in \mathbb{G} \ : \ T(g) = e_H\},$$

donde notamos por $e_{\mathbb{G}}$ y e_H los respectivos elementos neutros de $\mathbb{G}$ y H. Este conjunto $kerT$ es un subgrupo normal de $\mathbb{G}$.

- $T(e_{\mathbb{G}}) = e_H$ ya que $T(g) = T(e_{\mathbb{G}} * g) = T(e_{\mathbb{G}}) * T(g)$. Despejando $T(e_{\mathbb{G}}) = e_H$.

- $kerT$ **es un subgrupo**. Observemos que $T(e_{\mathbb{G}}) = T(g * g^{-1}) = T(g) * T(g^{-1})$, por tanto $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$. Así para todo $g, g' \in kerT$ se tiene que

$$T(g * g'^{-1}) = T(g) * T(g'^{-1}) = e_H * (T(g'))^{-1} = e_H * e_H = e_H$$

  por tanto $g * g'^{-1} \in kerT$, lo que prueba que es un subgrupo.
- $kerT$ **es normal**. Si $g \in \mathbb{G}$ y $m \in kerT$ entonces

$$T(g * m * g^{-1}) = T(g) * T(m) * T(g^-1) = T(g) * e_H * (T(g)^{-1}) = e_H$$

  lo que prueba que $g*m*g^{-1} \in kerT$ y por tanto $kerT$ es normal $\square$

Ejemplo 3. *El grupo General Lineal* $GL(n, \mathbb{R})$ *es un grupo no abeliano, como sabemos. Consideramos el subgrupo*

$$N = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \quad |A| = 1 \}.$$

N *es normal.*

Observemos que si una matriz tiene determinante igual a 1, $|A| = 1$, entonces su matriz inversa cumple que $|A^{-1}| = 1$. Esto prueba que N es un subgrupo del grupo de matrices cuadradas de orden n y determinante no nulo. Para ver la normalidad, tomemos $B \in GL(n, \mathbb{R})$ y $A \in N$, entonces

$$|BAB^{-1}| = |B||A||B^{-1}| = |B||B^{-1}| = |BB^{-1}| = |I| = 1$$

luego $BAB^{-1} \in N$ $\square$

Ejemplo 4. $\{e\}$ *y* $\mathbb{G}$ *son siempre subgrupos normales de cualquier grupo* $\mathbb{G}$*.*

El siguiente resultado nos pone en relación los subgrupos normales y las congruencias.

Teorema 1. *Sea* $(\mathbb{G}, *)$ *un grupo.*

A: *Si* $\sim$ *es una* ***congruencia*** *sobre* $\mathbb{G}$*, entonces la clase del elemento neutro*

$$N = [e] = \{g \in \mathbb{G} \ : \ g \sim e \ \}$$

es un subgrupo normal de $\mathbb{G}$*.*

B: *Si* N *es un subgrupo* ***normal*** *de* $\mathbb{G}$*, entonces la relación sobre* $\mathbb{G}$*,* $\sim_N$*, es decir*

$$g \sim_N g' \qquad \Leftrightarrow \qquad g * g'^{-1} \in N, \qquad \textit{para todo} \qquad g, g' \in \mathbb{G},$$

es una congruencia. De modo que $N = [e]_{\sim_N}$*.*

C: *El conjunto cociente*

$$\mathbb{G}/\sim = \mathbb{G}/\sim_{[e]} = \mathbb{G}/N$$

es, en ambos casos, un grupo cociente.

Demostración:

A: Esta prueba es análoga a la que hicimos para ver que $kerT$ es un subgrupo normal en el ejemplo anterior.

- $[e]$ **es un subgrupo**. Si $g, g' \in N = [e]$, como $\sim$ es una congruencia se tiene que

  $$e = g' * g'^{-1} \sim e * g'^{-1} = g'^{-1}$$

  así $g'^{-1} \in [e] = N$. De nuevo por ser $\sim$ una congruencia

  $$g * g'^{-1} \sim e * e = e \qquad \Rightarrow \qquad g * g'^{-1} \in [e] = N,$$

  lo que prueba que N es un subgrupo.
- N **es normal**. Si $m \in [e] = N$ y $g \in \mathbb{G}$, entonces por ser $\sim$ una congruencia tenemos que

  $$g * m \sim g * e = g$$

  y

  $$(g * m) * g^{-1} \sim g * g^{-1} = e,$$

  luego $g * m * g^{-1} \in [e] = N$.

B: Si N es un subgrupo de $\mathbb{G}$ vimos que la relación $\sim_N$ es una relación de equivalencia (ver los preliminares del Teorema de Lagrange). Veamos que $\sim_N$ es una congruencia. Si

$$g \sim_N g' \qquad \Leftrightarrow g * g'^{-1} \in N$$

y

$$h \sim_N h' \qquad \Leftrightarrow h * h'^{-1} \in N$$

entonces

$$(g * h) * (g' * h')^{-1} = g * h * (h'^{-1} * g'^{-1}) = (g * h * h'^{-1} * g^{-1}) * g * g'^{-1}.$$

Como $h * h'^{-1} \in N$, de la normalidad de N se sigue que $g * h * h'^{-1} * g^{-1} \in N$. Como $g * g'^{-1} \in N$ y N es un subgrupo llegamos a que

$$(g * h) * (g' * h')^{-1} = (g * h * h'^{-1} * g^{-1}) * g * g'^{-1} \in N$$

y por tanto $(g * h) \sim_N (g' * h')$. Así $\sim_N$ es una congruencia.

Claramente $N = [e]_{\sim_N}$.

C: Ahora si $\sim$ es una congruencia y $N = [e]$ se tiene que $\sim = \sim_N$. Claro, si $g \sim g'$ se tiene que $g * g'^{-1} \sim g' * g'^{-1} = e$ lo cuál dice que $g \sim_N g'$ Y diceversa $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`