AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

HOMOMORFISMOS DE GRUPOS.

El concepto de **homomorfimo** aparece al estudiar toda estructura algebraica. La idea que hay detrás es encontrar la esencia algebraica de una estructura dejando a un lado su apariencia concreta.

Definición 1. *Dados dos grupos* $(\mathbb{G}_1, *_1)$ *y* $(\mathbb{G}_2, *_2)$ *y una aplicación* T *entre ellos:*

$$T : (\mathbb{G}_1, *_1) \to (\mathbb{G}_2, *_2)$$

decimos que

A: *que* T *es un* ***homomorfismo*** *si para todo* $g, h, \in \mathbb{G}_1$ *se tiene que*

$$T(g *_1 h) = T(g) *_2 T(h).$$

(La aplicación preserva las operaciones).

B: *que* T *es un monomorfismo si* T *es un homomorfismo inyectivo.*

C: *que* T *es un epimorfismo si* T *es un homomorfismo suprayectivo.*

D: *que* T *es un* ***isomorfismo*** *(de grupos) si* T *es un homomorfismo biyectivo.*

Ya hemos visto ejemplos de isomorfismos.

Ejemplo 1. *Dado* $(\mathbb{Z}_{132}, +)$*, como* $132 = 11 \times 12$ *con* 11 *y* 12 *primos entre si, vimos que*

$$\begin{array}{ccccccc} T & : & (\mathbb{Z}_{132}, +) & \to & (\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{12}, +) & & \\ & & [x] & \to & T([x]) & = & ([x]_{11}, [x]_{12}) \end{array}$$

verificaba que para todo $x, y \in \mathbb{Z}_{132}$

$$\begin{aligned} T([x] + [y]) = (T[x + y]) &= ([x + y]_{11}, [x + y]_{12}) \\ = ([x]_{11} + [y]_{11}, [x]_{12} + [y]_{12}) &= ([x]_{11}, [x]_{12}) + ([y]_{11}, [y]_{12}) \\ &= T([x]) + T([y]). \end{aligned}$$

*Además el Teorema Chino del Resto nos permite decir que T es una biyección. Ahora podemos decir que T es un **isomorfismo** entre los grupos $(\mathbb{Z}_{132}, +)$ y $(\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{12}, +)$.*

Observación 1. *Si $\mathbb{G}_1$ y $\mathbb{G}_2$ son dos grupos relacionados por un isomorfismo, decimos que los grupos son **isomorfos**. Lo cual quiere decir que como grupos tienen un mismo comportamiento.*

Recordemos que cuando haciamos "operaciones rápidas", era lo mismo operar en $(\mathbb{Z}_{132}, +)$, por ejemplo, que operar en $(\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{12}, +)$.

Teorema 1. *Sea $T : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ un **homomorfismo** de grupos. Por e_1 y e_e denotamos los respectivos elementos neutros de cada grupo. Las siguientes propiedades las verifica la aplicación T*

1. $T(e_1) = e_2$.
2. $T(g^{-1}) = (T(g))^{-1}$ *para todo* $g \in \mathbb{G}_1$
3. *Se define el **nucleo** de la aplicación T por*

$$kertT = \{\ g \in \mathbb{G}_1\ :\ T(g) = e_2\ \}.$$

   $kerT$ es un subgrupo de $\mathbb{G}_1$.
4. *T es inyectiva si y solo si $kerT = \{e_1\}$.*
5. *Se define la **imagen** de T por*

$$ImgT = \{\ T(g) \in \mathbb{G}_2\ :\ g \in \mathbb{G}_1\ \}$$

   $ImgT$ es un subgrupo de $\mathbb{G}_2$.
6. *T es suprayectiva si y solo si $ImgT = \mathbb{G}_2$.*
7. *Si $N = kerT$, la relación de equivalencia $\sim_N$ sobre $\mathbb{G}_1$*

$$(para \qquad g, g' \in \mathbb{G}_1, \qquad g \sim_N g' \qquad \Leftrightarrow \qquad g *_1 g'^{-1} \in kerT\ ),$$

   *es una **congruencia** (o equivalentemente $kerT$ es un subgrupo normal de $\mathbb{G}_1$).*

Observación 2. *El Teorema anterior es análogo al que se tiene para **espacios vectoriales** y que suele verse en un curso de Álgebra Lineal.*

Demostración:

1. $T(e_1) = T(e_1 *_1 e_1) = T(e_1) *_2 T(e_1)$, ahora multiplicando por el inverso de $T(e_1)$, tenemos que $e_2 = T(e_1)$.

2. Por el apartado anterior se tiene que
$$e_2 = T(g *_1 g^{-1}) = T(g) *_2 T(g^{-1})$$
Ahora multiplicando por $T(g)^{-1}$, se tiene que $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$.
3. Si $g, h \in KerT$, entonces
$$T(g *_1 h^{-1}) = T(g) *_2 T(h^{-1}) = e_2 *_2 (T(h))^{-1} = e_2 *_2 e_2 = e_2,$$
por tanto $g *_1 h^{-1} \in kerT$ y de la caracterización de subgrupo concluimos que $kerT$ lo es.
4.
   - Por 1.), tenemos que $e_1 \in kerT$. Si T es inyectiva ningún otro elemento de $\mathbb{G}_1$ toma por T el valor e_2.
   - Si $kerT = \{e_1\}$ y $T(g) = T(g')$, entonces usando 2.)
$$e_2 = (T(g))^{-1} *_2 T(g') = T(g^{-1}) *_2 T(g') = T(g^{-1} *_1 g'),$$
y así solo puede ocurrir que $g^{-1} *_1 g' = e_1$, lo que implica que $g' = g$. Por tanto T es inyectiva.
5. Si $T(g), T(g') \in ImgT$, entonces por 2.)
$$T(g) *_2 (T(g'))^{-1} = T(g) *_2 T(g'^{-1}) = T(g *_1 g'^{-1}),$$
luego $T(g) *_2 (T(g'))^{-1} \in ImgT$. Por la caracterización de subgrupo, $ImgT$ lo es.
6. Es evidente, por definición de aplicación suprayectiva, que T lo es si y solo si $T(\mathbb{G}_1) = \mathbb{G}_2$
7. Vimos al estudiar el Teorema de Lagrange que dado un subgrupo N, en este caso $N = kerT$, la relación $\sim_N$ es una relación de equivalencia. Lo que falta ver para concluir es que es un **congruencia**. Hay que ver que
$$g \sim_N g' \text{ y } h \sim_N h' \qquad \Rightarrow \qquad g *_1 h \sim_N g' *_1 h'.$$
Ahora, ésto se verifica ya que
$$\begin{aligned} T((g *_1 h) *_1 (g' *_1 h')^{-1}) &= T(g) *_2 T(h) *_2 (T(h'^{-1} *_1 g'^{-1})) \\ T(g) *_2 T(h) *_2 T(h'^{-1}) *_2 T(g'^{-1}) &= T(g) *_2 T(h *_1 h'^{-1}) *_2 T(g'^{-1}) \\ &= T(g) *_2 e_2 *_2 T(g'^{-1}) = T(g *_1 g'^{-1}) = e_2 \end{aligned}$$
y así $(g *_1 h) *_1 (g' *_1 h')^{-1} \in kerT$. Lo que es equivalente a decir que $g *_1 h \sim_N g' *_1 h'$ $\square$

Observación 3. *Sea $f : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un* ***monomorfismo*** *de grupos. Es decir f es un homomorfismo inyectivo. Entonces $\mathbb{G}$ es un subgrupo de $\mathbb{G}'$, salvo isomorfismo.*

Claro, $f(\mathbb{G}) = Imgf \trianglelefteq \mathbb{G}'$. Luego f es un **isomorfismo** entre $\mathbb{G}$ y $Imgf$.

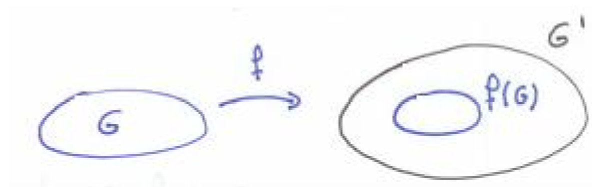

Figura 1. Monomorfismo

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es