AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

TEOREMA DE ISOMORFÍA DE GRUPOS.

El siguiente resultado es análogo al que se tiene para espacios vectoriales y que se ve en un curso de Álgebra Lineal. También es análogo al que veremos en el contexto de Anillos. La construcción de anillos cocientes es, sin embargo, la más interesante de nuestro estudio de Estructuras Algebraicas.

Teorema 1. ***(de Isomorfía de Grupos)***. *Sea* $(\mathbb{G}, *)$ *un grupo.*

1. *Si N es un subgrupo de $\mathbb{G}$ de modo que la relación de equivalencia $\sim_N$ es una* ***congruencia*** *(o equivalentemente si N es un subgrupo normal), entonces la aplicación*
$$\begin{array}{cccccc} i & : & \mathbb{G} & \rightarrow & \mathbb{G}/N & \\ & & g & \rightarrow & i(g) & = & [g] \end{array}$$
es un epimorfismo.
2. *Si $T : (\mathbb{G}, *) \rightarrow (\mathbb{G}', *')$ es un* ***homomorfismo*** *de grupos suprayectivo, entonces los grupos $(\mathbb{G}/kerT, \odot)$ y $(G', *')$ son* ***isomorfos***.

Demostración:

1. La aplicación i claramente está bien definida y es suprayectiva. Solo hace falta ver que es un homomorfismo de grupos. Por un lado, el grupo cociente $(\mathbb{G}/N, \odot)$ lo es, ya que la relación $\sim_N$ es una congruencia (ver construcción del grupo cociente). Por otro,
$$i(g * h) = [g * h] = [g] \odot [h] = i(g) \odot i(h).$$
La segunda igualdad se da por definición de la operación en el grupo cociente $\mathbb{G}/N$, que está bien definida precisamente por ser la relación $\sim_N$ una congruencia.
2. Sea ahora $N = kerT$. Como vimos en el capítulo de homomorfismos, $kerT$ es un subgrupo de $\mathbb{G}$ de modo que la relación $\sim_N$

es una congruencia. Luego $\mathbb{G}/kerT$ es un grupo cociente. Sobre él se define la aplicación F que toma valores en G' por

$$F \circ i = T$$

es decir, para todo $g \in \mathbb{G}$

$$F([g]) = T(g) \qquad \begin{array}{ccc} & & T & \\ & \mathbb{G} & \rightarrow & \mathbb{G}' \\ i & \downarrow & \nearrow & F \\ & \mathbb{G}/kerT & & \end{array}$$

Veamos que efectivamente F es un isomorfismo.

- F **está bien definida.** Si $g \sim_N g'$, entonces $g * g'^{-1} \in kerT$, por tanto

$$e' = T(g * g'^{-1}) = T(g) *' (T(g'))^{-1} = F(g) *' (F(g'))^{-1}.$$

  Despejando $F(g') = F(g)$. Luego la definición de F no depende del elemento de la clase de equivalencia $[g]$ elegido para representarla.
- F **es un homomorfismo.**

$$\begin{aligned} F([g] \odot [h]) &= F([g * h]) = T(g * h) \\ &= T(g) *' T(h) = F([g]) *' F([h]). \end{aligned}$$

- F **es suprayectiva.** Como T es suprayectiva, por hipótesis, también lo es F.
- F **es inyectiva.** Si $F([g] = F([h])$, se tiene que

$$T(g) = T(h) \qquad \Leftrightarrow \qquad T(g) *' (T(h))^{-1} = T(g * h^{-1}) = e';$$

  lo que quiere decir que

$$g * h^{-1} \in kerT \qquad \Leftrightarrow \qquad g \sim_N h,$$

  así $[g] = [h]$. Luego F es inyectiva $\square$

Ejemplo 1. *Se considera la aplicación entre grupos*

$$\begin{array}{ccccccc} T & : & (\mathbb{R}, +) & \rightarrow & (\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times) & & \\ & & t & \rightarrow & T(t) & = & \cos(2\pi t) + i\,\mathrm{sen}(2\pi t). \end{array}$$

Hay que ver que T es un homomorfismo y estudiar $kerT$ e $ImgT$.

- T **está bien definido.** T está bien definida ya que $T(t) \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Observemos que el módulo $|T(t)| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- T **es un homomorfismo.** Para todo $t, s \in \mathbb{R}$, considerando las propiedades de las funciones seno y coseno y la definición del producto de números complejos, tenemos que

$$\begin{aligned} T(t+s) &= \cos(2\pi(t+s)) + i\,\mathrm{sen}(2\pi(t+s)) \\ &= \cos(2\pi t)\cos(2\pi s) - \mathrm{sen}(2\pi t)\,\mathrm{sen}(2\pi s) \\ &\quad + i\left(\cos(2\pi t)\,\mathrm{sen}(2\pi s) + \cos(2\pi s)\,\mathrm{sen}(2\pi t)\right) \\ &= (\cos(2\pi t) + i\,\mathrm{sen}(2\pi t)) \times (\cos(2\pi s) + i\,\mathrm{sen}(2\pi s)) = T(t) \times T(s). \end{aligned}$$

- T **no es inyectiva.** El núcleo del homomorfismo T es

$$\begin{aligned} kerT &= \{\ t \in \mathbb{R}\ :\ T(t) = \cos(2\pi t) + i\,\mathrm{sen}(2\pi t) = 1\ \} \\ &= \{\ t \in \mathbb{R}\ :\ \cos(2\pi t) = 1 \ \text{ y } \ sen(2\pi t) = 0\ \} = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

  Como el núcleo es mayor que $\{0\}$, se tienen que la aplicación no es inyectiva.

- T **no es suprayectiva.** Si $t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$, $T(t)$ recorre la circunferencia de centro cero y radio 1 en $\mathbb{C}$, luego es fácil ver que

$$ImgT = \{\ z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 1\ \} = S^1.$$

  $ImgT$ es un subgrupo de $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$, pero como no es el grupo completo, T no es suprayetiva$\square$

Observación 1. *Ahora la aplicación*

$$\begin{array}{ccccccc} T & : & (\mathbb{R},+) & \to & (ImgT = S^1, \times) & & \\ & & t & \to & T(t) & = & \cos(2\pi t) + i\,\mathrm{sen}(2\pi t), \end{array}$$

es suprayectiva y así por el Teorema de Isomorfía (y que $kerT = \mathbb{Z}$) se tiene

$$(\mathbb{R},+)/kerT = (\mathbb{R},+)/\mathbb{Z} \qquad \textit{es isomorfo a} \qquad ImgT = S^1$$

Observemos también que

$$(\mathbb{R},+)/kerT = (\mathbb{R},+)/\mathbb{Z} = \{\ [r]\ :\ r \in [0,1]\ \}.$$

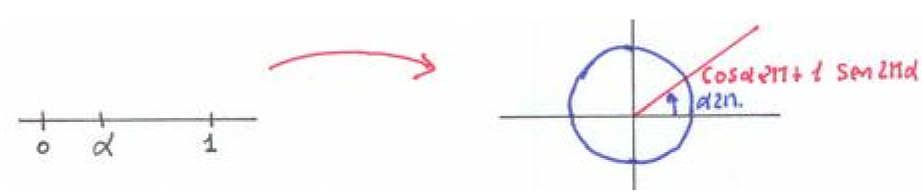

Figura 1. Isomorfismo.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es