ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

INTRODUCCIÓN A LA INTEGRAL.

En $\mathbb{R}$:

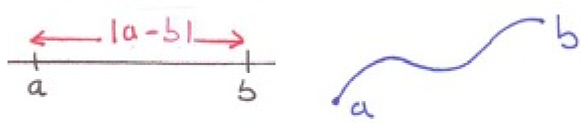

FIGURA 1. ¿Comó medimos una línea curva?

sabemos calcular la distancia entre dos números y por tanto la **longitud** de un intervalo o segmento $[a, b]$, ésta es

$$|a - b|.$$

En $\mathbb{R}^2$:

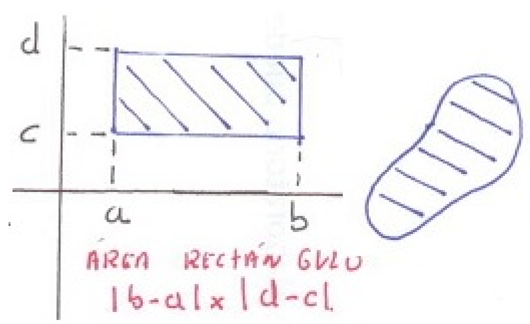

FIGURA 2. ¿Comó medimos el área de un recinto cualquiera en el plano?

sabemos calcular el **área** de un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, ésta es

$$|a - b| \times |c - d|.$$

En $\mathbb{R}^3$:

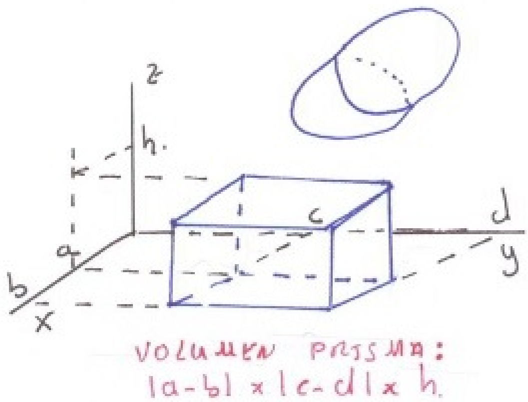

FIGURA 3. ¿Cómo medimos el volumen de un sólido cualquiera en el espacio?

sabemos calcular el **volumen** de un prisma $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, éste es

$$|a - b| \times |c - d| \times |e - f|.$$

Sabemos medir objetos "rectos", pero ¿sabríamos hacerlo si curvamos estos objetos? La respuesta matemática a esta pregunta en la **Integral.** La integral es una herramienta matemática que nace para calcular áreas de un tipo determinado de recintos del plano. Después, como ocurre con otras herramientas matemáticas, descubrimos nuevos significados y aplicaciones de la misma (pensemos en la derivada desde su nacimiento geométrico hasta sus muchas aplicaciones vistas en el Tema anterior).

Empezaremos viendo que es la integral, vamos a definirla en su forma más sencilla (la idea es calcular un área). Después trataremos el problema de calcularla de un modo efectivo. Más adelante veremos que con esta herramienta se pueden calcular longitudes y volúmenes. Y no solo eso, si no que permite definir y estudiar otros problemas sorprendentes: definir probabilidades, estudiar frecuencia de señales, comprimir información, escribir las leyes del electromagnetismo ...etc

Áreas. Nosotros sabemos medir áreas de recintos elementales, como los que se muestran en la figura.

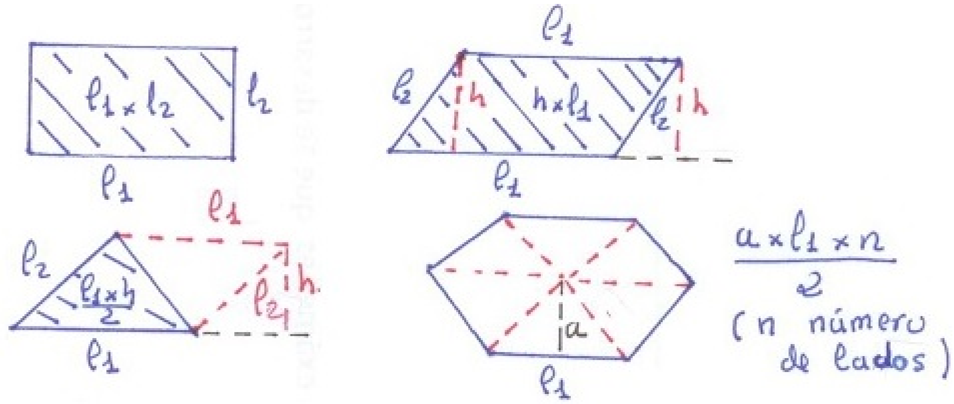

FIGURA 4. Áreas elementales

Observemos que el **áera de un rectángulo** viene dada por una convención o definición: "lado por lado". A partir de esta definición el área de un paralelogramo, de un triángulo o de un polígono regular se pueden deducir fácilmente.

El caso del círculo es más misterioso. El área del círculo "copia" la fórmula de la de los polígonos regulares: "longitud del perímetro por apotema (radio) dividido por dos".

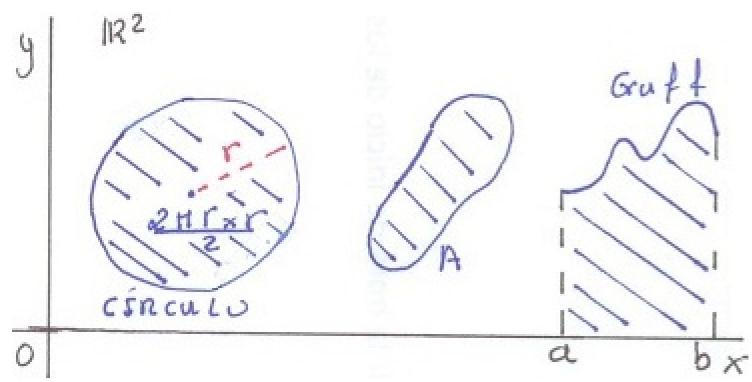

FIGURA 5. Recintos planos. Área del círculo.

En este Tema daremos una demostración rigurosa de que efectivamente ésta es el área del circulo. Pero antes de ello, nuestro objetivo es más modesto. No pretendemos medir cualquier recinto plano sino solo aquel que deja una función por debajo de su gráfica:

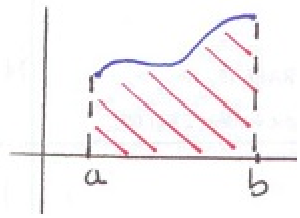

Figura 6. Recinto a medir.

Este recinto consta de tres lados rectos y uno curvo. ¿Como abordar el problema de calcular su área? Un proceder habitual es que si sabemos hacer algo (medir rectángulos en este caso) pués lo usamos hasta donde podamos. Aproximando por ejemplo. En la siguiente figura vemos como nuestro recinto puede ser aproximado por la suma de las áreas de tres rectángulos.

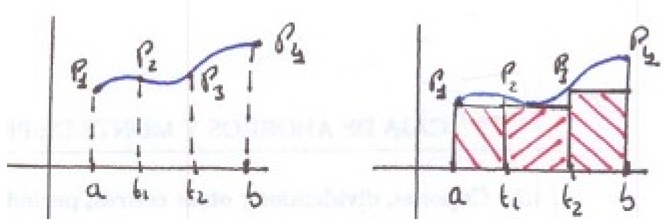

Figura 7. Aproximación por rectángulos.

Este es un método usual en las ciencias aplicadas. Nosotros queremos ir un poco más lejos. No nos conformamos con una aproximación sino que queremos encontrar, **definir**, de forma precisa el **área** de este recinto. Para ello necesitamos la noción abstracta de continuidad de la recta, de límite, que hemos estudiado previamente.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es