

## ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

### CÁLCULO DE PRIMITIVAS. OTRAS TÉCNICAS.

El cálculo de una primitiva  $\int f(x)dx$  consiste en transformarla usando: integración por partes, cambios de variables, manipulaciones algebraicas u otros "trucos" hasta llegar a una expresión que sea una primitiva elemental. Es decir una expresión que esté en la tabla de primitivas elementales.

Como ejemplos de otros "trucos" vamos a ver integrales donde aparecen las funciones trigonométricas e hiperbólicas. Para hacer estas primitivas tendremos que usar relaciones trigonométricas (ver Apéndice correspondiente) así como relaciones hiperbólicas (ver Apéndice Funciones Logaritmo y Exponencial ).

**Primitivas de Funciones Trigonómicas.** Recordemos que:

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$     y     $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$     y     $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$     y     $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$ .

( más adelante en el Apéndice Funciones Trigonómicas probaremos todas estas propiedades ).

Utilizando estas propiedades convenientemente se puede resolver primitivas en las que aparecen involucradas las funciones seno y coseno.

**Ejemplo. 1.**  $\int \cos^2 x dx$ .

**Demostración:** Observemos que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

y despejando  $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ . Así

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \end{aligned}$$

□

En general las primitivas del tipo  $\int \sin^n x \cos^m x dx$  con  $n$  y  $m$  pares se resuelven usando las fórmulas de reducción:

- $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$ ,  $n > 2$  y par (ver artículo Integración por Partes).
- $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$ ,  $n > 2$  y par (ejercicio).

Hasta llegar a una expresión con  $\int \cos^2 x dx$  o  $\int \sin^2 x dx$ .

**Ejemplos. 1.**     ▪  $\int \sin^n x \cos^m x dx$  con  $n$  y  $m$  uno par y otro impar.

- $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

**Demostración:** Vamos a resolver el ejemplo concreto, el caso general se sigue de forma análoga.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx = \\ &= - \int -\sin x \cos^4 x dx + \int -\sin x \cos^6 x dx \end{aligned}$$

podemos pensar en el cambio de variable  $y = \cos x$ , y lo que sale es

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}$$

□

**Ejercicio. 1.**  $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{1 + \sin x} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx \end{aligned}$$

estas integrales ya son inmediatas

$$= \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

□

**Ejemplo. 2.**  $\int \tan^2 x dx$ .

**Demostración:** ¿Qué camino elegir para resolver una primitiva? Se necesita un poco de práctica y de pericia. En la primitiva que tenemos podemos pensar en un cambio de variable  $u = \tan x$  y así  $du = \tan^2 x + 1 dx$ . Luego

$$\int \tan^2 x dx = \int \tan^2 x \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x + 1} dx = \int \frac{u^2}{u^2 + 1} du$$

esto es un integral racional

$$= \int \frac{u^2 + 1}{u^2 + 1} + \frac{-1}{1 + u^2} du = u - \arctan u = \tan x - x.$$

aunque seguro que es más fácil el camino

$$\int \tan^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1) - 1 dx = \tan x - x$$

□

**Primitivas donde aparecen funciones hiperbólicas.** Recordemos que:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$     y     $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\sinh(x + y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$     y     $\sinh 2x = 2 \cosh x \sinh x$ .

(ver Apéndice Funciones Logaritmo y Exponencial ).

**Ejemplo. 3.**  $\int \cosh^2 x dx$ .

**Demostración:** Observemos que

$$\cosh 2x = \cos^2 x + \sen^2 x = \cos^2 x + (\cos^2 x - 1)$$

y despejando  $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$ . Así

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 x dx &= \int \frac{\cosh 2x + 1}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int \cosh 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sinh 2x \end{aligned}$$

□

**Ejemplo. 4.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}$ .

**Demostración:** Si pensamos en el cambio de variable  $x = \sqrt{2} \cosh u$  y así  $dx = \sqrt{2} \sinh u du$ , tendremos que

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} &= \int \frac{\sqrt{2} \sinh u du}{\sqrt{2 \cosh^2 u - 2}} \\ &= \int \frac{\sinh u}{\sinh u} du = u = \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

□

**Otras primitivas.** Aunque encontrar primitivas no es una tarea fácil, tampoco hay que tener miedo a ciertas expresiones. Si las miramos con detalle podemos ver métodos sencillos de integración.

**Ejemplo. 5.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$ .

**Demostración:** No sabemos que hacer con esta expresión. Podemos poner  $y = \sqrt{\sqrt{x}+1}$ , despejando  $x = (y^2 - 1)^2$  y derivando en  $y$ ,  $dx = 4y(y^2 - 1)dy$ .

Así

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} &= \int \frac{4y(y^2 - 1)dy}{y} = \int 4y^2 - 4dy \\ &= \frac{4}{3}y^3 - 4y = \frac{4}{3}(\sqrt{\sqrt{x}+1})^3 - 4\sqrt{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

□

**Ejemplo. 6.**  $\int (\sen x \int_0^x \sen t dt) dx$ .

**Demostración:** A primera vista, impresiona esta primitiva. Si nos fijamos en la función  $\int_0^x \sen t dt$ , el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que su derivada es  $\sen x$ , luego el cambio de variable  $u = \int_0^x \sen t dt$  nos da

$$\begin{aligned} \int (\sen x \int_0^x \sen t dt) dx &= \int u du \\ &= \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \int_0^x \sen t dt \right)^2 \end{aligned}$$

□

## REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN  
*E-mail address:* Cesar\_Ruiz@mat.ucm.es