ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

INTRODUCCIÓN.

Las aplicaciones de la **integral** son muchas y variadas. Lo que ocurre es que muchas de ellas tiene que ver con integrales de funciones de varias variables. Esto se escapa del alcance de este curso. Veamos una idea preliminar.

Sea una función de varias variables

$$\begin{array}{rcll} f & : & [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n & \to \quad \mathbb{R} \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \to \quad f(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

acotada. De forma similar a como hemos construido la integral de Riemann se puede construir la integral de Riemann para funciones de varias variables

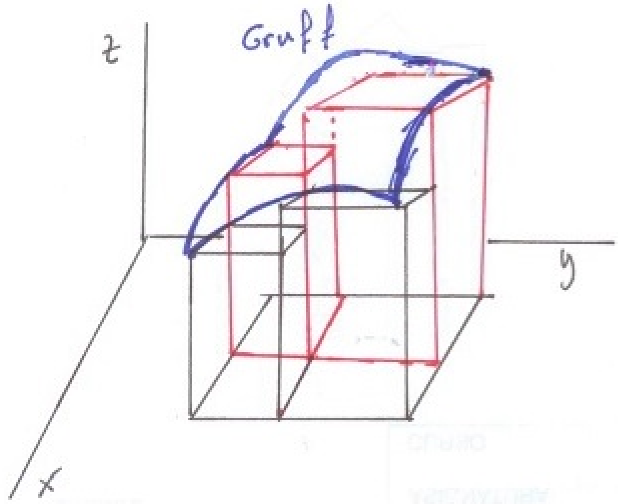

FIGURA 1. Suma inferior de Riemann para una función de dos variables.

Con un poco de trabajo veríamos que

$$\int_{[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]} f(x_1, .., x_n)dx_1..dx_n$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(.... \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, .., x_n)dx_1 \right) ... \right) dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Es decir, para calcular la integral de una función de n variables tenemos que hacer n integrales de funciones de una variable. Veamos un ejemplo para comprender lo anterior.

Ejemplo. 1. *Consideramos la función de dos variables* $f(x,y) = x+y$ *para* $(x,y) \in [0,1] \times [1,2]$, *entonces tendríamos que*

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[1,2]} x + y dx dy &= \int_1^2 (\int_0^1 x + y dx) dy \\ &= \int_1^2 (\frac{x^2}{2} + yx|_0^1) dy = \int_1^2 \frac{1}{2} + y dy \\ &= (\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}|_1^2 = 2 \end{aligned}$$

Hemos integrado primero sobre la variable "x", tomando la "y" como constante. Después hemos integrado respecto de "y".

Aplicaciones.

- Una primera aplicación de la integral de Riemann de funciones de una variable es poder calcular integrales de funciones de más variables (pero esto se escapa de este curso)
- Una segunda aplicación es poder definir integrales de funciones no acotadas o sobre intervalos no acotados: la **integral impropia** (que vemos a continuación).
- La integral impropia permite definir el concepto de función de distribución: **Estadística** (que se ve en cursos posteriores).
- La integral impropia permite definir el concepto de **transformada de Laplace**, útil para estudiar E.D.O., circuítos eléctricos ..etc (que se ve en cursos posteriores).
- La integral se construye para **medir**. Veremos algunas cosas sobre longitudes, áreas y volúmenes.
- Con la integral se definen funciones de forma rigurosa (ver péndices sobre la construcción del **logaritmo** o el **coseno**).
- Haremos mención, en los Apéndices de este Tema, de otras aplicaciones que quedan fuera del alcance de este curso (pero que puede encontrarse en cursos superiores).

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es