ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

FUNCIONES INTEGRABLES.

Ya disponemos de una definición de integral. La cuál no parece muy operativa tanto para decir si una función es integrable como para para hacer el cálculo efectivo. Con un poco más de trabajo solucionaremos estos problemas.

Observación. 1. *Una primera observación es que nuestra definición de integral está dada para funciones acotadas, pero no necesariamente positivas. Una función como la de la figura siguiente*

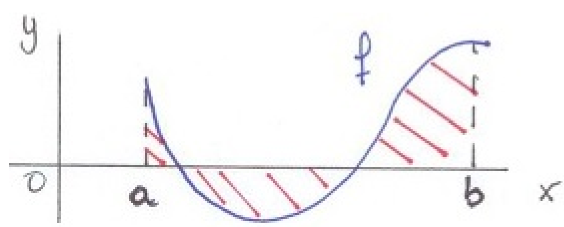

Figura 1. Integral de una función no positiva.

parece integrable, aunque la parte que queda por debajo del eje de las x's resta (por definición de sumas superiores) luego el resultado final no será un área.

Tenemos un criterio que nos dice si una función es integrable a no. Teórico si, pero muy útil dentro del desarrollo teórico de las propiedades de la integral, como vamos a ir viendo.

Teorema. 1. ***(Criterio de Riemann de integrabilidad)****. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:*

a: *f es integrable en el intervalo $[a,b]$.*

b: *Para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $P \in P([a,b])$ de modo que*

$$S(f,P) - I(f,P) < \epsilon.$$

Demostración: Vamos a utilizar las definiciones de integral, integral inferior y superior (la última vez que las vamos a tener que usar).
b$\Rightarrow$ **a**. Para cualquier partición P siempre se tiene que

$$I(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f \leq S(f,P).$$

Luego dado $\epsilon > 0$ y la partición P que nos da la afirmación **b**, tenemos que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P) - I(f,P) < \epsilon.$$

Como lo anterior es cierto para todo $\epsilon > 0$, concluimos que

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

y por tanto f es integrable (por definición de función integrable).
a$\Rightarrow$ **b**. Si f es integrable tenemos que

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar particiones P_1 y P_2 y por tanto una más fina $P = P_1 \bigcup P_2$ de modo que

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} \leq I(f,P_1) \leq I(f,P)$$

y

$$S(f,P) \leq S(f,P_2) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por tanto

$$S(f,P) - I(f,P) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2} - (\underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$$

$\square$

Este criterio nos permite encontrar otras formas más sencillas de comprobar la integrabilidad.

Proposición. 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la partición*

$$P_n = \{\, a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, ..., a + \frac{k(b-a)}{n}, ..., a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b \,\}$$

(es decir la partición que divide en n partes iguales el intervalo $[a,b]$). Si existen los límites

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$$

y son iguales, entonce f es integrable y además

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

Demostración: Sea $\alpha = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$, entonces dado $\epsilon > 0$ (y por definición de límite de una sucesión) existe un n suficientemente grande de modo que

$$S(f,P_n), I(f,P_n) \in (\alpha - \frac{\epsilon}{2}, \alpha + \frac{\epsilon}{2}).$$

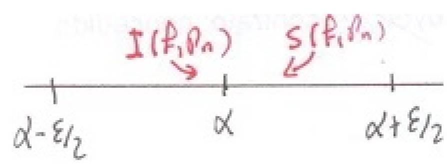

Figura 2. Límite.

Por tanto

$$S(f,P_n) - I(f,P_n) < \alpha + \frac{\epsilon}{2} - (\alpha - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon.$$

Así por el Criterio de Integrabilidad f es integrable. Además $\int_a^b f = \alpha$, pués no hay otra posibilidad.

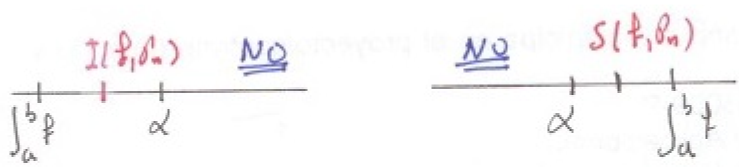

Figura 3. Demostración sin palabras.

□

Ejemplo. 1. *Consideramos $f(x) = rx$, para $r > 0$ y $x \in [0,a]$. Queremos calcular $\int_0^a rxdx$. (El término "dx", que aparece aquí por primera vez, solo indica que la variable de nuestra función es la "x").*

Demostración: Si representamos nuestra función, la cuál es positiva y creciente,

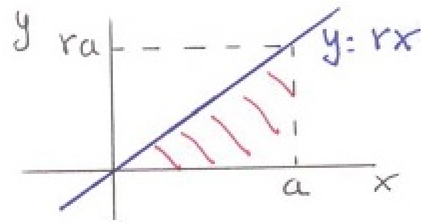

FIGURA 4. Área por debajo de la gráfica f.

la integral debe salir $\frac{a^2 r}{2}$, que es el área del triangulo que hemos dibujado. Veámoslo.

Tomamos la partición que divide en n partes iguales el intervalo $[0, a]$.

$$P_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, ..., \frac{ia}{n}, ..., \frac{(n-1)a}{n}, a\}.$$

Ahora calculamos, teniendo en cuenta que la función es creciente,

$$I(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{ia}{n} r \frac{a}{n} = \frac{a^2 r}{n^2} \sum_{I=0}^{n-1} i = \frac{a^2 r}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{a^2 r(n-1)}{2n}.$$

($\sum_{I=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$, ver problemas sobre inducción). Y

$$S(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)a}{n} r \frac{a}{n} = \frac{a^2 r}{n^2} \sum_{I=0}^{n-1} i + 1 = \frac{a^2 r}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a^2 r(n+1)}{2n}.$$

Luego como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^2 r(n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2 r(n-1)}{2n} = \frac{a^2 r}{2},$$

la Proposición anterior nos dice que la integral existe y que

$$\int_0^a r x dx = \frac{a^2 r}{2}$$

□

Tenemos pués un método para calcular integrales, sin usar supremos e ínfimos sobre un colección de particiones ciertamente muy grande. Además el ejemplo anterior nos confirma que nuestra definición de integral es coherente con el concepto de área que tenemos para figuras elementales.

El siguiente resultado nos dice que una gran cantidad de funciones, de las que usamos usualmente, son integrables.

Teorema. 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en todo el intervalo $[a, b]$. Entonces f es integrable en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración: Sabemos que una función continua sobre un intervalo cerrado es acotada. También sabemos que es **uniformemente continua** (ver artículo correspondiente en el Tema de Continuidad). Por tanto, dado que la sucesión $(\frac{b-a}{n})_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in [a, b]$ y $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$; tomando n de modo que $\frac{b-a}{n} < \delta$, tenemos que

$$S(f, P_n) - I(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b-a}\frac{b-a}{n} = \epsilon \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n} = \epsilon.$$

El Criterio de Integrabilidad nos dice que f es integrable. Esta prueba nos dice además que

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0.$$

Así

$$0 < S(f, P_n) - \int_a^b f \leq S(f, P_n) - I(f, P_n) \to_{n\to\infty} 0,$$

lo que prueba que $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \int_a^b f$. De forma similar se ve que $\lim_{n\to\infty} I(f, P_n) = \int_a^b f$ $\square$

En el caso de las funciones continuas la prueba anterior nos da un método de cálculo de integrales de funciones continuas que ni siquiera requiere el uso de sumas superiores e inferiores. Veámoslo.

Corolario. 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en todo el intervalo $[a, b]$. Sea P_n la partición que divide en n partes iguales el intervalo $[a, b]$,*

$$P_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, ..., a + \frac{i(b-a)}{n}, ..., \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\}.$$

- **a:** *Para cada $x_{n,i} \in [a + \frac{i(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}]$, con $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{n,i})\frac{b-a}{n} = \int_a^b f.$$

- **b:** *En particular* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{i(b-a)}{n})\frac{b-a}{n} = \int_a^b f.$
- **c:** *En particular* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{(i+1)(b-a)}{n})\frac{b-a}{n} = \int_a^b f.$
- **d:** *En particular, si $[a, b] = [0, 1]$ tenemos que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f.$

Demostración: Vamos a probar solo el caso particular **d**) por simplicidad de notación. El resto de casos se hace de forma análoga.

Sabemos que la función es **uniformemente continua**. Por tanto, dado que la sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in [0,1]$ y $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$; tomando n de modo que $\frac{1}{n} < \delta$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} - I(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(f(\frac{i}{n}) - m_i)\frac{1}{n} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon\frac{1}{n} = \epsilon\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n} = \epsilon.$$

Así

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} - I(f, P_n) = 0.$$

Por ser continua la función sabemos que $\lim_{n\to\infty} I(f, P_n) = \int_0^1 f$, por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f$$

□

Ejercicio. 1. *Calcular* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(\sum_{k=1}^{n}(k+n)(k-n))$.

Demostración: Usamos la regla de suma por diferencia, operamos y cambiamos el contador para obtener

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(\sum_{k=1}^{n}(k+n)(k-n)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(\sum_{k=1}^{n}(k^2-n^2))$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}(\frac{k^2}{n^2}-1)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{k^2}{n^2}-1)+1+(1-1))$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^2}-1) = \int_0^1 x^2 - 1dx$$

Cuando sepamos calcular integrales, por medio de primitivas, veremos que la integral anterior es muy fácil de calcular

□

Observación. 2. *No solo las funciones continuas son integrables. En el siguiente artículo vamos a integrar la función*

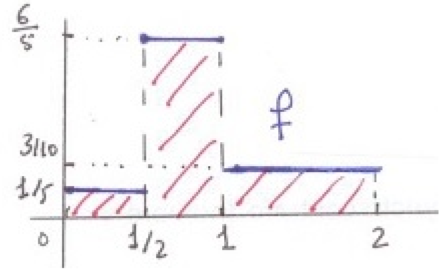

FIGURA 5. Función no continua integrable.

En general se puede decir que una función continua en un intervalo cerrado, salvo quizas en una cantidad finita de puntos, es integrable (ver hoja de ejercicios).

Ejercicio. 2. *(**Numérico**). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo $[a,b]$ de modo que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. ¿Cuántas veces hay que **muestrear** f para calcular la integral de f con un error menor que ϵ?*

Demostración: El valor de la integral lo podemos aproximar por una suma de la forma

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{i(b-a)}{n})$$

como nos indica el Corolario de arriba. Esta suma solo depende de las **muestras** $(\,f(a+\frac{i(b-a)}{n})\,)_{i=0}^{n-1}$ que tomamos de la función en los puntos $a+\frac{i(b-a)}{n}$, con $i = 0, 1, 2, ...n-1$ (resultado de dividir el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales: P_n).

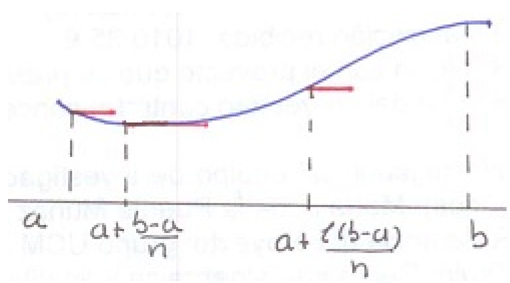

FIGURA 6. Muestreo de una función.

Observemos además que M_i el máximo que alcanza la función en el intervalo $[a+\frac{i(b-a)}{n}, (a+\frac{[i+1](b-a)}{n}]$ (el máximo se alcanza ya que la función es continua) verifica $M_i \geq f(a+\frac{i(b-a)}{n})$. Por tanto

$$
\begin{aligned}
&|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{i(b-a)}{n}|\\
&\leq S(f,P_n) - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{i(b-a)}{n})\\
&= \frac{b-a}{n}(\sum_{i=0}^{n-1} M_i - f(a+\frac{i(b-a)}{n}))
\end{aligned}
$$

usando el Teorema del Valor Medio y la acotación de la derivada de la función

$$
\leq \frac{b-a}{n}(\sum_{i=0}^{n-1} M\frac{b-a}{n}) = \frac{M(b-a)}{n}.
$$

Ahora si forzamos a que

$$
\frac{M(b-a)}{n} \leq \epsilon,
$$

entonces el número de muestras n tendrá que ser

$$
\frac{M(b-a)}{\epsilon} \leq n
$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es