ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS. PRIMITIVAS ELEMENTALES.

Según el Teorema Fundamental del Cálculo, determinar el valor de una integral se reduce a encontrar una **primitiva** de la función a integrar.

Definición. 1. *Se dice que una función F es una **primitiva** de una función f dada si*

$$F' = f.$$

Escribimos $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)$.

Observación. 1.

1. *Si F es una primitiva de f, por el Teoream del Valor Medio, cualquier otra primitiva de f es de la forma*

$$G(x) = F(x) + K$$

para $K \in \mathbb{R}$ constante.

2. *Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es una primitiva de f. Ahora bien esto no nos ayuda mucho a la hora de calcular $\int_a^b f$. Necesitamos una expresión explícita de F, que no dependa del signo integral.

3. *Hay casos, como por ejemplo $f(x) = e^{-x^2}$ donde se puede demostrar que no existe una expresión de la primitva de f en términos elementales.*

4. *En general encontrar una primitiva en forma explícita de una función no es un problema fácil. Vamos a dar algunos métodos que permiten encontrarlas en algunos casos.*

Primitivas elementales. Si le damos la vuelta a la tabla de derivadas que conocemos, tendremos un puñado de primitivas.

$\int K dx = Kx$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \sinh x dx = \cosh x$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$	$\int \cosh x dx = \sinh x$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = (\sinh)^{-1} x$

Además tenemos que tener en cuenta que

- $\displaystyle\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
- Para $K \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int K f(x)dx = K \int f(x)dx.$

En general ante el problema $\displaystyle\int f(x)dx$, si no estamos ante alguno de los casos de la tabla de arriba, debemos hacer "trasformaciones" de modo que lleguemos a uno de ellos.

Ejemplos. 1.
- $\displaystyle\int 3x^5 + 2x^3 + 7dx.$
- $\displaystyle\int \cos x + 2\operatorname{sen} x dx.$

Demostración:

- $$\int 3x^5 + 2x^3 + 7dx = 3\int x^5 dx + 2\int x^3 dx + \int 7dx$$
  y mirando en las tablas
  $$= 3\frac{x^6}{6} + 2\frac{x^4}{4} + 7x = \frac{x^6}{2} + \frac{x^4}{2} + 7x$$
- $$\int \cos x + 2\operatorname{sen} x dx = \int \cos x dx + 2\int \operatorname{sen} x dx$$
  y mirando en las tablas
  $$\operatorname{sen} x - 2\cos x$$

□

Ejemplos. 2.
- $\displaystyle\int (x-2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3}.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1).$

Los ejemplos anteriores no se encuentran directamente en la tabla, pero es fácil convencerse de que hemos hayado las primitivas correctas. Cuando veamos el Teorema del Cambio de Variable quedará todo explicado.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`