ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS. LA REGLA DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

A partir de la regla de la derivada de un producto

$$(\, h(x)r(x)\,)' = h'(x)r(x) + h(x)r'(x)$$

vamos a deducir lo siguiente.

Teorema. 1. ***(Regla de Integración por Partes*** *) Si f y g son funciones tales que f' y g' son continuas, entonces*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Demostración: Como

$$(\, f(x)g(x)\,)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

así

$$f(x)g'(x) = (\, f(x)g(x)\,)' - f'(x)g(x)$$

podemos integrar (todas las funciones que aparecen son continuas y por tanto tienen primitiva)

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)dx &= \int (\, f(x)g(x)\,)'dx - \int f'(x)g(x)dx \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

□

Observación. 1.

- *Estamos transformado el cálculo de $\int fg'$ por el de $\int f'g$ con la esperanza de que este sea más simple que el primero.*
- *La Regla de Integración por Partes suele usarse en cálculos como series Fourier y transformadas de Laplace. Además es la pieza clave para definir el concepto de soluciones débiles de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, todo ello propio de cursos más avanzados.*

Observación. 2. *Según la regla de Barrow y usando la Regla de Integración por Partes, tenemos que*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(donde notamos $h(x)|_a^b = h(b) - h(a)$).

Ejemplo. 1. $\int xe^x dx$.

Demostración: En ese caso es fácil encontrar tanto una primitiva de $f(x) = x$ o de $g(x) = e^x$. La diferencia es que al derivar la primera, está desaparece. Así, usando la Regla de Integración por Partes

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

Vemos que la primera integral se convierte en otra elemental. $\square$

Ejemplo. 2. $\int x \cos x dx$.

Demostración: Este es un caso como el anterior. Usando la Regla de Integración por Partes

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

$\square$

Ejemplo. 3. $\int \ln x dx$.

Demostración: Aquí no vemos un producto de funciones, salvo que pongamos un uno multiplicando a $\ln x$, así

$$\int \ln x dx = \int 1 \times \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x$$

$\square$

Ejemplo. 4. $\int \operatorname{sen} x e^x dx$.

Demostración: Si integramos o derivamos estas funciones parece que todo nos lleva a lo mismo. Ahora aplicando dos veces la Regla de Integración por Partes y despejando después llegamos a una solución. Así

$$\int \operatorname{sen} x e^x dx = \operatorname{sen} x e^x - \int \cos x e^x dx$$

$$= \operatorname{sen} x e^x - [\cos x e^x - \int - \operatorname{sen} x e^x dx] = \operatorname{sen} x e^x - \cos x e^x - \int \operatorname{sen} x e^x dx.$$

Llegamos a la integral de partida, pero podemos depejar y así

$$\int \operatorname{sen} x e^x dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

□

Ejercicio. 1. *Demuestra la siguiente fórmula de reducción:*
$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$, *$n > 2$ y par.*

Demostración: Tenemos n par, luego $n \geq 2$. Ponemos

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^{n-1} x$$

aplicando la Regla de Integración por Partes

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \int (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x dx$$

usando que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \int (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx$$

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \int (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x dx - (n-1) \int \operatorname{sen}^n x dx$$

despejando

$$\int \operatorname{sen}^n x dx + (n-1) \int \operatorname{sen}^n x dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \int (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x dx$$

y por tanto

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = \frac{-1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es