ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS. INTRODUCCIÓN.

Los **conjuntos de números** que conocemos, hasta ahora, son:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Naturales, Enteros, Racionales, Reales y Complejos respectivamente.

Los números son los primeros datos, **variables**, que se utilizan en programación. Entenderlos permite comprender como se implementan.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., 8, 9, ..., 37, 38, ..., 100, 101, ..., n, n+1, ...\}.$$

Escribimos n un número natural cualquiera, $n \in \mathbb{N}$. Al siguiente a n, lo denotamos $n+1$.

Con diez dígitos, $\{0, 1, 2, 3, ..., 8, 9\}$, podemos escribir todos los números naturales. Aunque con dos, $\{0, 1\}$, sería suficiente (**sistema binario**).

Sabemos **sumar** y **multiplicar** números naturales.

Observación. 1. *Lo anterior, que parece tan sencillo no siempre fue así. Pensad en:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & M & M & V & I & I \\ + & M & C & C & X & X & I \\ - & - & - & - & - & - & - \\ & & & & & & ? \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 0 & 7 \\ + & 1 & 2 & 2 & 1 \\ - & - & - & - & - \\ & 3 & 2 & 2 & 8 \end{array}$$

El **sistema posicional** de numeración no era conocido por griegos o romanos en la antigüedad. Alrededor del año mil fue introducido por los árabes en Europa procedente de la India.

Conocidos los números Naturales, son fáciles de escribir los números Enteros:

$$\mathbb{Z} = \{...., -n-1, -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ..., 27, 28, ..., m, m+1, ...\}$$

y los números Racionales, los quebrados:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad q \neq 0\}.$$

Con todos estos números deberíamos saber operar.

Ejercicio. 1. *Calcula*

- $2007 \times \dfrac{134}{34} = \quad;$
- $\dfrac{\frac{23}{7} \times \frac{14}{3}}{\frac{45}{9} - \frac{3}{12}} = \quad;$
- *¿cuál de los siguiente números es mayor:* $\dfrac{134}{1223}$ *o* $\dfrac{133}{1222}$*?*

Los números Reales. Los antiguos griegos no conocían los números como hoy los escribimos, pero entendían perfectamente $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$. En realidad eran muy buenos geómetras.

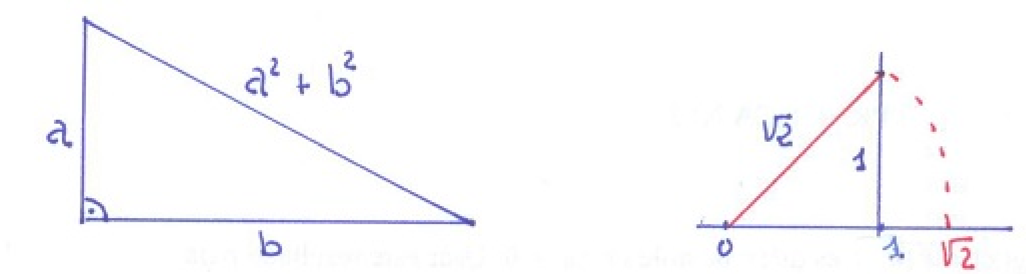

Figura 1. Teorema de Pitágoras.

No entendían muy bien un número como $\sqrt{2}$.

Proposición. 1. $\sqrt{2}$ *no es un número racional.*

Demostración: Razonaremos por **reducción al absurdo**. Es decir, supondremos que algo es cierto. Argumentaremos lógicamente y llegaremos a un error. Luego deduciremos que nuestro punto de partida era incorrecto.

Supongamos que existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ de modo que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, es decir $(\frac{p}{q})^2 = 2$.

Simplificando la fracción $\frac{p}{q}$, podemos asegurar que p y q no tienen divisores comunes. Ahora, si $(\frac{p}{q})^2 = 2$, entonces

$$p^2 = 2q^2.$$

De esto se deduce que p es un número par (multiplica dos números impares y comprueba que siempre da un impar). Si p es par se puede escribir como $p = 2k$ y así

$$\frac{4k^2}{q^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2k^2.$$

De lo que deducimos que q también es un número par. Tanto p como q son divisibles por 2, lo que contradice no tener divisores comunes. Esta contradicción solo puede venir de algo que hemos supuestos cierto, pero que no lo es. $\sqrt{2}$ no puede ser una fracción $\square$

Los antiguos griegos también conocían que la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es siempre constante

$$\frac{l}{d} = cte = \pi.$$

A esta constante la llamaron π.

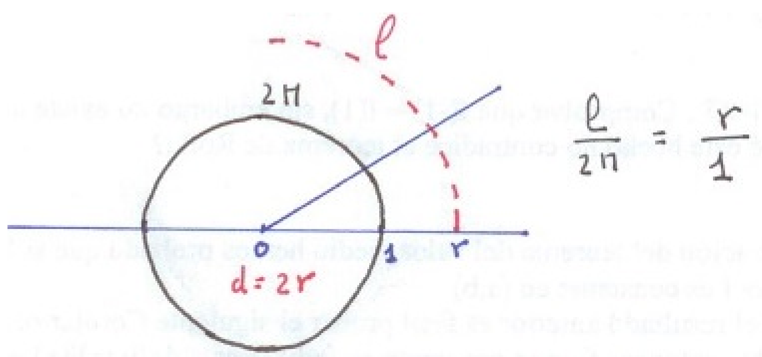

Figura 2. Geometría de la circunferencia.

En 1761 Johann Lambert pudo probar que π no es ningún número racional. Por otro lado, π es un número muy importante. Aparece en muchos cálculos. Por ello desde antiguo se han buscado aproximaciones de $\pi = 3,1415......$ De él se conocen muchísimos decimales. Este es el motivo por el que el número π se usa para comprobar el buen funcionamiento de los módulos de cálculo de los microprocesadores.

$\sqrt{2}$ y π son ejemplos de números reales. Números que sabemos que existen pero que no les podemos dar una representación escrita tan precisa como los números anteriores ($\mathbb{N}$ o $\mathbb{Q}$).

Conocer los números reales en profundidad y sus múltiples usos es el objetivo de este curso. De forma general, el conocimiento de los números reales $\mathbb{R}$ nos permite tener una representación matemática de la recta, el plano y el espacio.

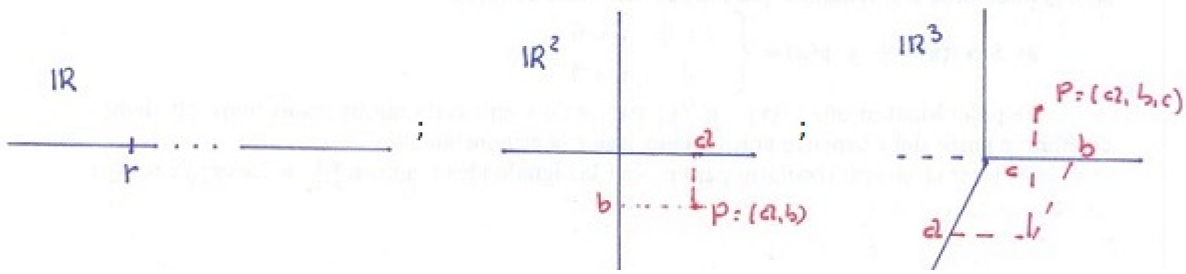

Figura 3. Recta, plano y espacio.

Las aplicaciones entre estos objetos geométricos, las funciones, es decir si $n, m \in \{1, 2, 3\}$ trabajaremos con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, son elementos esenciales en el desarrollo de las matemáticas y sus aplicaciones.

Ejemplos. 1.

- *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuya gráfica es una parábola. La ' x ' es la única variable de la función.*

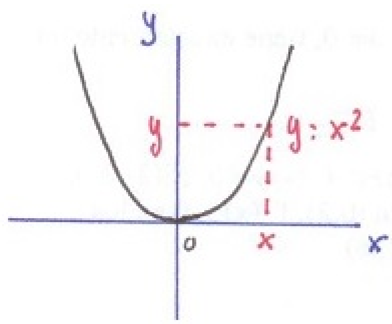

Figura 4. Gráfica de una función. Parábola.

- *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t^2)$; función de la recta al plano cuya imagen es una curva paramétrica. En este caso de nuevo la parábola.*

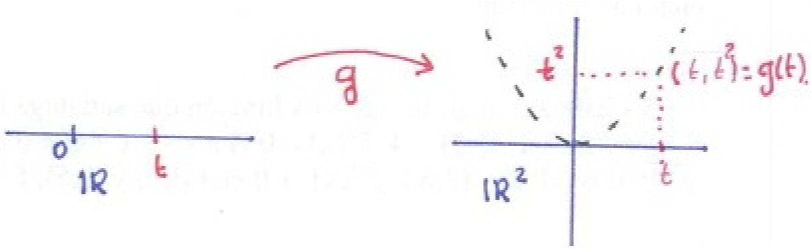

Figura 5. Curva paramétrica.

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x, y, z) = x+y+z$. *Función del espacio en la recta, campo escalar o potencial. En este caso la función tiene tres variables* x, y *y* z.

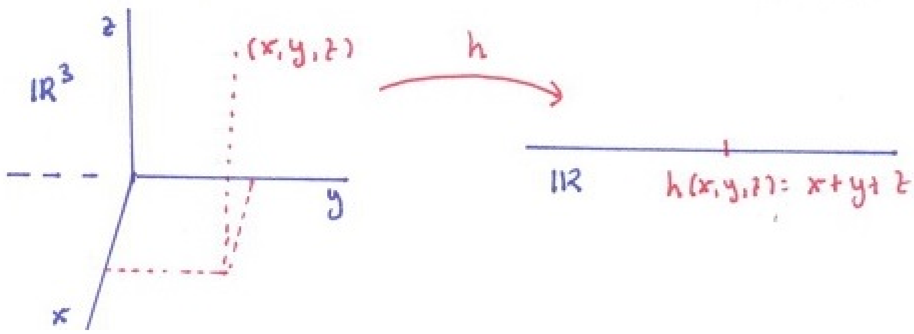

Figura 6. Campo escalar. Potencial.

Las funciones buenas, las usadas habitualmente en ingeniería, se pueden derivar e integrar. La derivada y la integral son dos poderosas herramientas que permiten dar muchos usos a las funciones.

Primero hay que conocer como funcionan las funciones de una sola variable; después como lo hacen las funciones de varias vaiables. En general un problema con una función de n variables se reduce a n problemas con funciones de una única variable.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es