ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES. INTRODUCCIÓN.

El manejo de números naturales, como su nombre indica es "natural".

Ejemplo. 1. *El número $\frac{1}{3}$ indica una parte de tres, lo cual es fácil de entender. El problema está en dividir la unidad en tres partes iguales.*

Cuando escribimos $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$ estamos resumiendo el siguiente proceso:

$$\begin{array}{ll} 1 & \underline{|3\quad\quad} \\ \ \ 10 & \ 0,333\ldots 3 \\ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ddots & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 1 & \end{array}$$

es decir

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{1}{30}; \qquad \frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{300};$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{1}{3000}; \ldots; \frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + ... + \frac{3}{10^k} + \frac{1}{3 \times 10^k}.$$

Los números $x_1 = 0,3;\ x_2 = 0,33;\ x_3 = 0,333; ....; x_k = 0,33_{k-\text{veces}} \ldots 3;$....etc se van acercando a $\frac{1}{3}$, ya que las distancias que separan estos números de $\frac{1}{3}$, $\quad |x_k - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3 \times 10^k}$, son cada vez más pequeñas. Estamos aproximando un número con infinitos decimales por números con decimales finitos (computables).

Ejemplo. 2. $\sqrt{2}$*, como sabemos, no es un número racional. Es fácil ver que que*

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Y usando la calculadora vemos que $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$ *¿Cómo llega la calculadora a este resultado?*

Método de las tangentes de Newton. En primer lugar veamos algunos ejemplos de resolución de ecuaciones.

Ejemplos. 1.
- $\dfrac{3-x}{4+2x}=2$
- $x^2-2x+2=0$
- $\ln(\operatorname{sen}(2x)+1)=0.$
- $\dfrac{x^6-3x^3+x^2-1}{x^4+1}=0$

Demostración:

- La primera ecuación se escribe también como $3-x=8+4x$. Es una ecuación de primer grado en la que podemos despejar la incógnita. Así $5x=-5$, y por tanto $x=-1$.
- La ecuación de segundo grado $x^2-2x+2=0$, la podemos escribir como $(x-1)^2+1=0$. Esta ecuación no tiene solución real, ya que $(x-1)^2+1\geq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}$.
- La ecuación $\ln(\operatorname{sen}(2x)+1)=0$ parece algo más complicada. Para resolverla necesitamos conocer las propiedades de las funciones $\ln x$ y $\operatorname{sen} x$ (a lo largo de estos apuntes las estudiaremos, como las de otras funciones llamadas elementales). Así el logaritmo solo se anula para $x=1$, luego nuestra ecuación queda equivalente a $\operatorname{sen}(2x)+1=1$, luego $\operatorname{sen} 2x=0$. La función seno se anula si $2x=k\pi$, donde $k\in\mathbb{Z}$. Luego $x=k\frac{\pi}{2}$, para $k\in\mathbb{Z}$. Es decir la ecuación tiene " infinitas "soluciones:
$$\{....-3k\frac{\pi}{2},-\pi,-k\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi,3\frac{\pi}{2},\dots,k\frac{\pi}{2},\dots\}$$
- La última escuación, tiene un denominador positivo. Tendremos la igualdad si y solo si $x^6-3x^3+x^2-1=0$. En este caso no sabemos despejar la incógnita. Más adelante, estudiando continuidad de funciones podremos decir indirectamente que esta ecuación tiene solución. Como encontrar explícitamente alguna de sus soluciones será otro problema.

$\square$

Dada una expresión en x, escribimos $f(x)$, el **Método de las Tangentes de Newton** es un procedimiento que permite aproximar (a través de una sucesión) las raíces de una ecuación $f(x)=0$. Lo presentamos con un ejemplo para dar una aproximación decimal al número $\sqrt{2}$.

1. Consideramos las ecuación $x^2-2=0$, cuyas raíces son obviamemente $\pm\sqrt{2}$. Nos fijamos en la función $f(x)=x^2-2$ (nuestra ecuación ahora es $f(x)=0$). Fijamos un punto $x_0>\sqrt{2}$ (puede ser 2, π, 4 el que queramos).

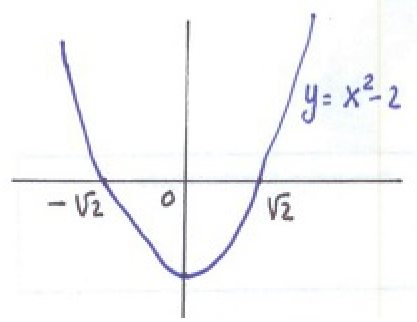

FIGURA 1. Gráfica de la función $f(x)=x^2-2$. Una parábola.

2. Derivando la función, $f'(x)=2x$, podemos encontrar la recta tangente a las gráfica de f por el punto $(x_0,f(x_0))$ (en el Tema de Derivadas repasaremos estos conceptos). Dicha recta tangente es $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=2x_0(x-x_0)+x_0^2-2$

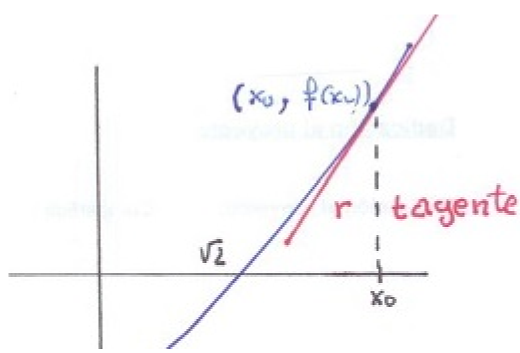

FIGURA 2. Recta tangente.

3. A continuación calculamos la intersección de la recta tangente con el eje de abcisas o de las ”x” (es decir la recta y=0). Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x_0(x-x_0)+x_0^2-2 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

Tenemos la ecuación

$$0=2x_0(x-x_0)+x_0^2-2 \quad \Leftrightarrow \quad 2-x_0^2=2x_0(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2-x_0^2}{2x_0} = x - x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0 - \frac{x_0^2-2}{2x_0} = \frac{x_0^2+2}{2x_0}.$$

En general, para f una función cualquiera tendríamos

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad \text{en nuestro caso} \quad x = x_0 - \frac{x_0^2-2}{2x_0}.$$

LLamamos $x_1 = x_0 - \frac{x_0^2-2}{2x_0}$

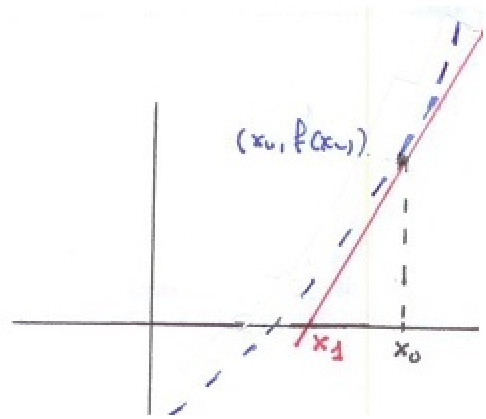

Figura 3. Cálculo geométrico de x_1.

4. Iteramos el proceso. Si tomamos x_1 en lugar de x_0 y definimos $x_2 = x_1 - \frac{x_1^2-2}{2x_1}$, es decir el punto de corte del eje de abcisas con la recta tangente a la parábola por el punto $(x_1, f(x_1))$, vemos, al menos gráficamente, que los puntos x_0, x_1 y x_2 se acercan a $\sqrt{2}$.

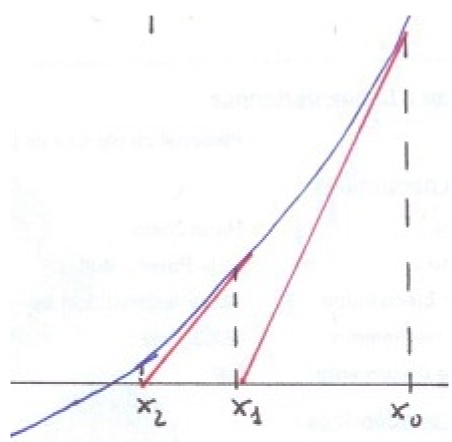

Figura 4. Iteración. Algoritmo.

En general, partiendo de un punto cualquiera $x_0 > \sqrt{2}$ y definiendo $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$, conseguimos una colección de números $x_0, x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ (sucesión) que parece que se acerca a nuestro objetivo $\sqrt{2}$. Observemos que si $x_0 \in \mathbb{Q}$, entonces todos los elementos de la colección x_n son números racionales. Veamos un ejemplo,

$$\text{si} \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 2 - \frac{2^2-2}{4} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$\text{si} \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{(\frac{3}{2})^2+2}{2 \times \frac{3}{2}} = \cdots = \frac{17}{12} = 1,41\,\widehat{6};$$

$$\text{si} \quad x_2 = \frac{17}{12}, \quad x_3 = \frac{(\frac{17}{12})^2+2}{2 \times \frac{17}{12}} = \cdots = \frac{1731}{1224} = \dots \text{etc.}$$

Si sabemos que $\sqrt{2} = 2,41421\dots$ ¿cuántas iteraciones del proceso anterior tendremos que hacer para llegar a un valor x_k que coincida con $\sqrt{2}$ en los tres primeros decimales?

5. Vamos a demostrar que efectivamente el proceso anterior se acerca (converge en el sentido de sucesiones) a la solución $\sqrt{2}$ de la ecuación $x^2 - 2 = 0$.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es