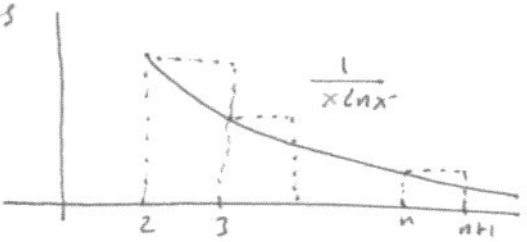
MMI PRÁCTICA-11

Nombre y apellidos.....

1.- Estudia la convergencia de la serie: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

(**Indicación:** considera la función $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, para $x \in (2, \infty)$).

LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ ES



DEL DIBUJO SE SIGUE QUE

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \geq \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx =$$

$$= \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} = \lim_{x \to \infty} \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) = \infty.$$

LUEGO LA SERIE ES DIVERGENTE

2.- Calcula las siguientes integrales impropias, si existen:

2_1.- $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$. $= -\frac{1}{\ln x}\Big|_0^{1/2} = -\frac{1}{\ln(\frac{1}{2})} - \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\ln x} =$

$$= -\frac{1}{-\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

2_2.- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. $= \operatorname{Arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \to \infty} \operatorname{Arctg} x - \lim_{x \to -\infty} \operatorname{Arctg} x =$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

3.- Determina la convergencia o divergencia de las integrales:

3_1.- $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3} dx$. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{1/3} + 2x^{1/4} + x^3} = \infty$

POR OTRO LADO $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ SI $x > 0$

COMO $\int_0^{100} x^{-1/3}\, dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1}\Big|_0^{100} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(100)^2}$ Y

$\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}\, dx \leq \int_0^1 x^{-1/3}\, dx$, LA PRIMERA INTEGRAL ES CONVERGENTE.

3_2.- $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx.$

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{\pi/2}^{\infty} < \infty$$

Luego la integral $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx$ es convergente.

4.- Calcula la **Transformada de Laplace** de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, es decir calcula

$$Lf(s) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x e^{-sx} dx, \quad \text{para} \quad s > 0.$$

(**Indicación:** usa la regla de integración por partes dos veces.)

$$L f(s) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, e^{-sx} dx \underset{\text{partes}}{=} \frac{\operatorname{sen} x\, e^{-sx}}{-s} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \cos x\, e^{-sx} dx =$$

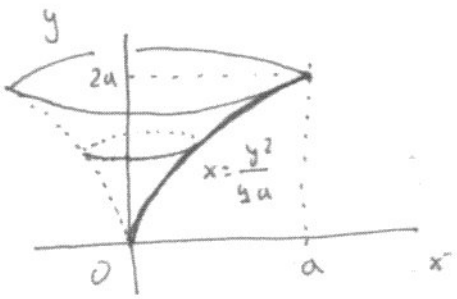
$$= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \cos x\, e^{-sx} dx \underset{\text{partes}}{=} \frac{1}{s} \left[\frac{\cos x\, e^{-sx}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, e^{-sx} dx \right]$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} L f(s).$$ despejando

$$\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) L f(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{y así} \quad \boxed{L f(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1}}$$

5.- Halla el volumen del cuerpo que se produce al girar, alrededor del eje $0Y$, el arco de parábola $y^2 = 4ax$ desde el origen hasta que corta a la recta $x = a > 0$.
(**Indicación:** Dibuja la situación antes de integrar).

$x = \frac{y^2}{4a}$; dibujando esta gráfica, teniendo en cuenta que ahora la variable es y,



$$\left(x = \frac{y^2}{4a} \Rightarrow a = \frac{y^2}{4a} \Leftrightarrow y = 2a \right)$$

La fórmula del volumen de revolución es

$$\int_0^{2a} \left(\frac{y^2}{4a}\right)^2 \pi\, dy =$$

$$= \frac{\pi}{16a^2} \int_0^{2a} y^4 dy = \frac{\pi}{16a^2} \left[\frac{y^5}{5} \Big|_0^{2a} \right] = \frac{\pi}{16a^2} \frac{32a^5}{5} =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{5}$$