MMI PRÁCTICA-13

Nombre y apellidos.....

1_1.- Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = \dfrac{\cos x}{x+1}$, centrado en el punto $a = 0$.

$f(x) = \dfrac{\cos x}{x+1}$, $f(0) = 1$; $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x(x+1) - \cos x}{(x+1)^2}$, $f'(0) = -1$

$f''(x) = \dfrac{(-\cos x(x+1) - \cancel{\operatorname{sen} x} + \cancel{\operatorname{sen} x})(x+1)^2 - 2(x+1)[-\operatorname{sen} x(x+1) - \cos x]}{(x+1)^4}$, $f''(0) = 1$

$$\boxed{P_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 - x + \frac{x^2}{2}}$$

1_2.-Determina el origen de la siguiente expresión: $\dfrac{\cos x}{1+x} \simeq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$ si $|x| \simeq 0$.

Si $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x}$, $P_{2,0}(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$ y en su gráfica $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P_{2,0}(x)}{x^2} = 0$, luego $P_{2,0}(x)$ está cerca de los valores de $f(x)$ si x está cerca de cero.

2.-Encuentra una estimación del error máximo que se puede cometer al tomar:

2_1.- $e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$ en lugar de e^x si $x \in [0,8, 1,2]$.

$f(x) = e^x$, $f(1) = e$; $f'(x) = f''(x) = e^x$ y $f'(1) = f''(1) = e$.

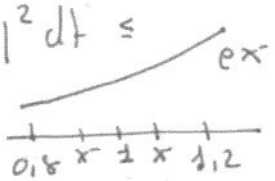
luego $P_{2,1}(x) = f(0) + f'(0)(x-1) + \dfrac{f''(0)}{2}(x-1)^2 =$

$= e(1 + (x-1) + \dfrac{(x-1)}{2})$.

El error que cometemos es

$$|R_{2,1}(x)| = |f(x) - P_{2,1}(x)| \underset{\text{Teorema de Taylor}}{=} \left| \int_1^x \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_1^x \frac{e^t}{2!}(x-t)^2\,dt \right| \le \int_1^x \frac{e^t}{2}|x-t|^2\,dt \le$$



$$\le \frac{e^{1,2}}{2}\int_1^x |x-t|^2\,dt \le$$

$|x-t| \le 0,2$

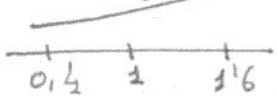
$$\le \frac{e^{1,2}}{2}\int_1^x |0,2|^2\,dt \le \frac{e^{1,2}}{2}(0,2)^3 \le \frac{4}{1000}e^2 \le$$

$$\underset{e \le 3}{\le} \frac{4 \times 9}{1000} = \frac{36}{1000}$$ una estimación del error.

2_2.-$e(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2})$ en lugar de e^x si $x \in [0,4,1,6]$.

Como en 2_1 $\left|R_{2,0}(x)\right| = \left|e^x - e(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2})\right| \leq$

$$\leq \int_1^x \frac{e^{1,6}}{2}|x-t|^2\,dt \underset{|x-t|\leq 0,6}{\leq} \frac{e^{1,6}}{2}\int_1^x (0,6)^2\,dt \leq$$



$$\underset{e\leq 3}{\leq} \frac{3^2}{2}(0,6)^3 = \frac{9\times 3\times 36}{1000} = \boxed{\frac{36}{1000}\cdot 27}$$

Esta estimación es "peor" que la de 2_1.

3.- Calcula la serie de Taylor de la función $f(x) = \log(1+x^2)$, centrada en el punto $a = 0$. (**Indicación:** Calcula la serie de Taylor de $\frac{1}{x^2+1}$, multiplica por $2x$ e integra. ¿Por qué?).

Como $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2+x^4-x^4}{1+x^2} =$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2} = \dots = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^k x^{2k}$$

Luego $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ serie de Taylor de $\frac{1}{1+x^2}$

Así $\frac{2x}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2x^{2k+1}$

Ahora si $f(x) = \log(1+x^2)$, $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

Luego $\boxed{f(x) - f(0) = f(x)} \underset{f(0)=0}{=} \int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt =$ Th. fundamental del cálculo

$$= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k x^{2k+1}\,dt =$$

Como la serie de Taylor converge uniformemente y usando la linealidad de la integral

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x 2(-1)^k x^{2k+1}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[2(-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right]_0^x = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{2(k+1)}}$$

Serie de Taylor de la función $f(x) = \log(1+x^2)$.