MMI PRÁCTICA-3

Nombre y apellidos.....

1.- Usa la definición de límite de una sucesión para probar que: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$.

Halla un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se tenga que $|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}| < 10^{-4}$.

TENEMOS QUE VER QUE $\left|\frac{n^2}{3n^2+1} - 1/3\right|$ SE HACE PEQUEÑO, CUANDO n ES GRANDE.

$$\left|\frac{n^2}{3n^2+1} - 1/3\right| = \left|\frac{3n^2 - 3n^2 - 1}{9n^2+1}\right| = \frac{1}{9n^2+1} < \frac{1}{n}$$

(YA QUE $9n^2+1 > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

LUEGO $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ CON $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Y ASÍ $\forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{n^2}{3n^2+1} - 1/3\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

LO QUE PROBABA QUE $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+1} = 1/3$.

POR OTRO LA SUCESIÓN $\left(\frac{1}{9n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ ES DECRECIENTE; ASÍ

$$\frac{1}{9n^2+1} < \frac{1}{10^4} \iff 10^4 < 9n^2+1.$$

$$\iff \frac{10^4-1}{9} < n^2$$

Y ASÍ $\sqrt{\frac{10^4-1}{9}} < n$; COMO $\sqrt{\frac{10^4-1}{9}} < \frac{100}{3} < 34$

SIEMPRE QUE $n \geq 34$ SE TIENE QUE $\left|\frac{n^2}{3n^2+1} - 1/3\right| < 10^{-4}$.

2.-Calcula los siguientes límites:

2_1.- $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+5^n}{2^{n+2}+5^{n+1}}$. (**Indicación:** fíjate en la potencia más alta de la base más grande).

DIVIDIENDO POR 5^{n+1},

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+5^n}{2^{n+2}+5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n+5^n}{5^{n+1}}}{\frac{2^{n+2}+5^{n+1}}{5^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{2\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 1} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} (2/5)^n \, 1/5 + 1/5}{\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 1} = \frac{0 + 1/5}{0 + 1} = 1/5.$$

2_2.- $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\dots+\frac{1}{n^2-1})$.

(**Indicación:** ¿Son ciertas las igualdades $\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{(a+1)(a-1)}=\frac{1}{2(a-1)}-\frac{1}{2(a+1)}$?).

USANDO LA INDICACIÓN TENEMOS QUE

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\dots+\frac{1}{(n-1)^2-1}+\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(2-1)(2+1)}+\frac{1}{(3-1)(3+1)}+\dots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2-1}-\cancel{\frac{1}{2+1}}+\frac{1}{3-1}-\cancel{\frac{1}{3+1}}+\cancel{\frac{1}{4-1}}+\cancel{\frac{1}{4+1}}+\cancel{\dots}+\cancel{\frac{1}{(n-2)}}-\frac{1}{n}+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right]$$

1 2 1 3 2 3 n-3 n-4 n-2

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right];$$ POR TANTO $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\dots+\frac{1}{n^2-1}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\right]=\frac{3}{4}$$

3.- Sucesión recurrente: determina si la sucesión siguiente es convergente o no. $a_{n+1}=a_n\frac{n}{n+7}$, con $a_1=7$.

— $a_1>0$ Y COMO $\frac{n}{n+7}>0$ $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ SE TIENE QUE $a_2>0$ Y SI $a_n>0$ ENTONCES $a_{n+1}=a_n\frac{n}{n+7}>0$

POR TANTO $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, LA SUCESIÓN ESTÁ ACOTADA INFERIORMENTE.

— ADEMÁS, VEAMOS QUE $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ES UNA SUCESIÓN DECRECIENTE. CLARO COMO $0<\frac{n}{n+7}<1$, $a_n>0$

SE TIENE QUE

$$\frac{n}{n+7}a_n<a_n.$$

POR TANTO $a_{n+1}<a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

POR SER LA SUCESIÓN $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ DECRECIENTE Y ESTAR ACOTADA INFERIORMENTE EXISTE

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\inf_n a_n.$$