MMI PRÁCTICA-7

Nombre y apellidos.....

1.- Supongamos que una función f satisface

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \qquad \text{para todo} \qquad x, y \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Además sabemos que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$. De la función g sabemos que $g(0) = 1$ y que $g'(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcula $f(0)$. (**Indicación:** usa la fórmula $(*)$ y que $g(0) = 1$.)

$f(0) = f(0+0) \underset{(*)}{=} f(0)g(0) + f(0)g(0) \underset{g(0)=1}{=} 2f(0)$. Si $f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

b) Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(x)$.

$$f'(x) \underset{\text{Def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(h) + f(h)g(x) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(h)}{h} + f(x)\left(\frac{g(h)-1}{h}\right) = g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} =$$

$$= g(x) + f(x)\cdot g'(0) = g(x) - f(x)g(0) = 0$$ usando que $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 1$ y que $g'(0) = -f(0)$

2.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$f(x) = \ln\sqrt{x^2-1}$ y $f(x) = \left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2$

(**Indicación:** primero entiende como se componen las funciones antes de usar la regla de la cadena).

(*) $f(x) = \ln\sqrt{x^2-1}$; si $h(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $l(x) = x^2-1 \Rightarrow f = h\circ g\circ l$

y así $f' = (h'\circ g\circ l)\cdot(g'\circ l)\cdot l'$, luego

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\,2x = \frac{x}{x^2-1}}$$

(**) Si $f(x) = \left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)^2$, $f'(x) = 2\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)\cdot\frac{\cos^2 x + (1+\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}x}{\cos^2 x} =$

$$= 2\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}x}{\cos^2 x} = 2\frac{(1+\operatorname{sen}x)^2}{\cos^3 x}$$ usando que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

3.-Se definen las funciones **coseno hiperbólico** por $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, **seno hiperbólico** por $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y **tangente hiperbólica** por $\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$.

Calcula las derivadas de estas funciones y de sus respectivas funciones inversas.

(**Indicación:** ¿Vés la analogía con las funciones trigonométricas usuales? Por otra lado, comprueba la igualdad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ y usalá a la hora de calcular las derivadas de las funciones inversas.)

- $\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$
- $\operatorname{senh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$
- $\tanh' x = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh x} = 1 - \tanh^2 x$

usando que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + \cancel{2e^x e^{-x}} + e^{-2x} - \cancel{e^{2x}} + \cancel{2e^x e^{-x}} - \cancel{e^{-2x}}}{4}$

$= 1.$

continuación problema 3.....

$$(\cosh^{-1})'(x) = \frac{1}{\cosh'(\cosh^{-1}(x))} = \frac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1}(x))} =$$

DERIVADA INVERSA

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1}(x)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

USANDO QUE $\operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x - 1$

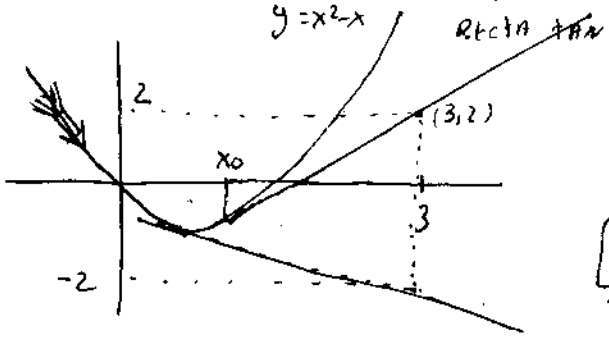
$$(\operatorname{senh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}'(\operatorname{senh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\operatorname{senh}^{-1}(x)) + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(\tanh^{-1})'(x) = \frac{1}{(\tanh)'((\tanh)^{-1}(x))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\tanh^{-1}(x))} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$

4.- Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2 - x$. Al desconectar el cohete, viajará a lo largo de la tangente a la curva por el punto de desconexión. ¿En que punto deberá parar el motor para alcanzar el punto $(3, 2)$? ¿Y para llegar al $(3, -2)$? (**Indicación:** haz un un dibujo para plantear las ecuaciones adecuadas.)



LA RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA EN UN PUNTO $(x_0, x_0^2 - x_0)$ VIENE DADA POR

$$\boxed{y} = (2x_0 - 1)(x - x_0) + x_0^2 - x_0 =$$

$$= 2x_0 x - 2x_0^2 - x + \cancel{x_0} + x_0^2 - \cancel{x_0} =$$

$$= \boxed{(2x_0 - 1)x - x_0^2}$$

SI PORTA MEL A QUE ESTA RECTA PASE POR EL PUNTO $(3,2)$, ES DECIR $2 = (2x_0 - 1)3 - x_0^2 \iff$

$\iff x_0^2 - 6x_0 + 5 = 0$ LUEGO $x_0 = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$

LA SOLUCIÓN $x_0 = 5$ NO SIRVE, PUES EN ESE MOMENTO (5, 25-5) HEMOS SOBREPASADO LA RECTA $x = 3$. LUEGO EL PUNTO DE DESCONEXIÓN ES EL PUNTO $(1, 0)$

SI PORTA MEL A QUE LA RECTA TANGENTE PASE POR EL PUNTO $(3,-2)$ TENDREMOS $-2 = (2x_0 - 1)3 - x_0^2 \iff x_0^2 - 6x_0 + 1 = 0$

ASÍ $x_0 = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} \begin{cases} \frac{6+4\sqrt{2}}{2} > 3 \\ \frac{6-4\sqrt{2}}{2} \in (0,1) \end{cases}$ EL PUNTO DE DESCONEXIÓN ES EN ESTE CASO $\left(\frac{6-4\sqrt{2}}{2}, \left(\frac{6-4\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{6-4\sqrt{2}}{2}\right)$.