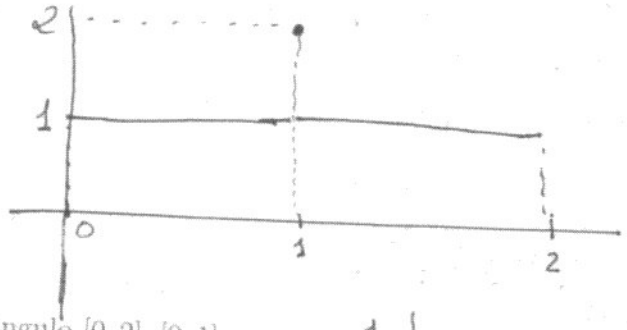
MMI PRÁCTICA-9

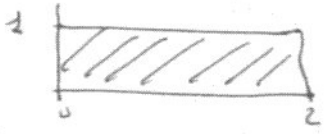
Nombre y apellidos.....

1.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,2]\backslash\{1\} \\ 2 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$

1_1.- Dibuja la gráfica de f.



1_2.- Cálcula el área del rectángulo $[0,2]\times[0,1]$.



ESTE ÁREA ES 2.

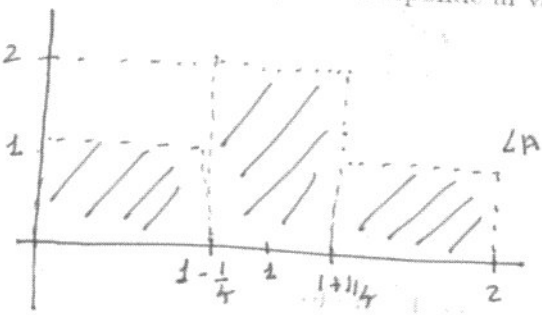
1_3.- Para cada $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, se considera la partición del intevalo $[0,2]$

$$P_k = \{0, 1-\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}, 2\}.$$

Se define

$$S_k = 1 \times ((1-\frac{1}{k}) - 0) + 2 \times ((1+\frac{1}{k}) - (1-\frac{1}{k})) + 1 \times (2 - (1+\frac{1}{k}))$$

¿Que área, dibujala, se corresponde al valor de S_k?



S_k ES EL ÁREA CORRESPONDIENTE A LA SUMA DE LOS TRES RECTÁNGULOS DIBUJADOS.

1_4.- Cálcula $\lim_{k\to\infty} S_k$ $= \lim_{k\to\infty} (1-\frac{1}{k}) + 2(\frac{2}{k}) + (1-\frac{1}{k}) =$

$= \lim_{k\to\infty} 1-\frac{1}{k} + \lim_{k\to\infty} \frac{4}{k} + \lim_{k\to\infty} 1-\frac{1}{k} = 1+0+1 = 2$

1_5.- ¿Coinciden los resultados de 1_2.- y 1_4.-

1_2 y 1_4 PARECEN DECIR QUE

$\int_0^2 f(x)\,dx = 2$ IGUAL AL ÁREA DEL RECTÁNGULO $[0,2]\times[0,1]$, AUNQUE LA GRÁFICA DE f ES DISTINTA A $y=1$, AUNQUE ES SÓLO EN UN PUNTO.

2.- Prueba que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \leq 1$.

(**Indicación:** no intentes calcular la integral; dibuja la gráfica de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.)

$\mathrm{Dom}\, f = [0,1]$.

$f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$

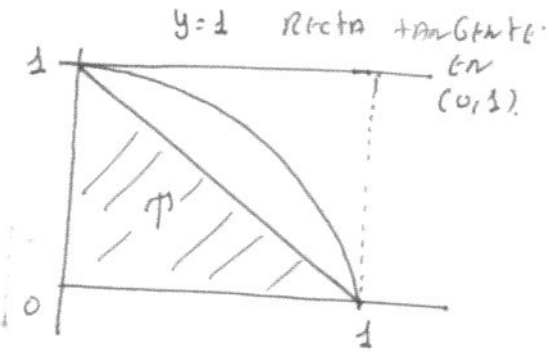
$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx \begin{cases} =0 & \text{si } x=0 \\ <0 & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

Luego f es decreciente

$$f''(x) = \frac{-2\sqrt{(1-x^2)} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} =$$

$$= \frac{-2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0$$

Luego f es cóncava



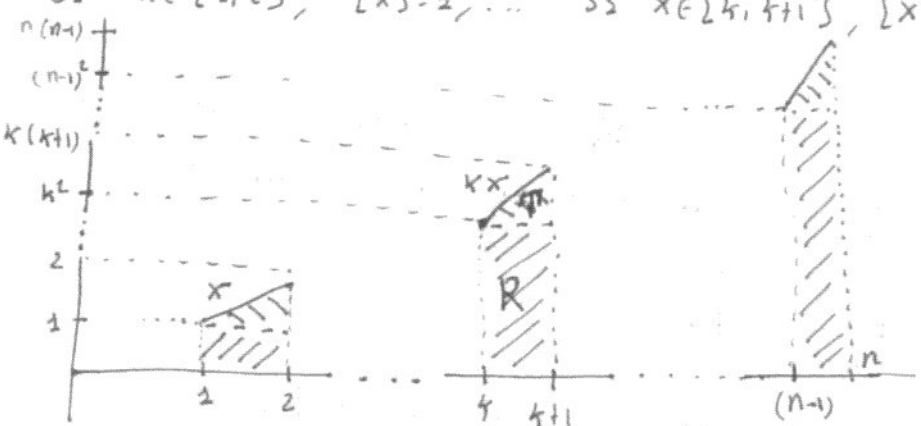
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua en $[0,1]$ luego integrable y por el gráfico es claro que

$$\tfrac{1}{2} = \text{Área } A \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \leq 1$$

3.- Si $[x]$ representa la parte entera del número x, cálcula $I_n = \int_1^n x[x]dx$

(**Indicación:** no intentes calcular la integral; dibuja la gráfica de $f(x) = x[x]$. Mide áreas y utiliza el problema 1.2. de la primera hoja de problemas.)

Si $x \in [1,2]$, $[x]=1$, ... si $x \in [k, k+1]$, $[x]=k$ ... así



$$\int_0^n x[x]\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} kx\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{1 \times k^2}_{\text{Área } R} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(k(k+1) - k^2\right)}_{\text{Área } A}$$

Problema de la integral

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(k^2 + \frac{1}{2}k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{n(n-1)}{4}.$$

Problema 1.2.

$$= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}$$