ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

Propiedades de los NÚMEROS REALES.

Respecto de las operaciones suma y producto y del orden, los números reales se comportan como los racionales y se operan de la misma manera.

Ejemplos. 1.

- *Resolvamos la ecuación:* $(x-3)+(x-7)=2$. *Es claro que* $2x-10=2$. *Así* $2x=12$ *y por último* $x=6$.
- *La inecuación* $\dfrac{1-2x}{x+2} \leq 3$ *se resuelve en dos pasos. Si* $x+2 \geq 0$ *o lo que es lo mismo si* $x \geq -2$, *entonces*

  $$1-2x \leq 3(x+2) = 3x+6 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq 5x \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x.$$

  Luego deducimos que $x \geq -1$. *Por otro lado si* $x < -2$, *entonces* $1-2x \geq 3(x+2) = 3x+6$. *Por tanto*

  $$-5 \geq 5x \quad \Leftrightarrow \quad -1 \geq x$$

  los cuál es cierto ya que $x < -2$.

  Concluimos que la inecuación se verifica para todo $x \in \mathbb{R} \backslash [-2,-1) = (-\infty,-2) \bigcup [-1,\infty)$.

Las operaciones anteriores se hacen independientemente de que x sea un número real o racional (incluso llegado el momento pueda ser un número complejo). Lo que diferencia a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ es la propiedad del extremo superior. A continuación la estudiamos en profundidad.

Propiedad del extremo superior.

Definición. 1. **A:** *Decimos que un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$ *está* ***acotado superiormente*** *si existe* $M \in \mathbb{R}$ *de modo que* $a \leq M$ *para todo elemento* $a \in A$. *Se dice que* M *es una* ***cota superior*** *de* A.

B: *Decimos que un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$ *está* ***acotado inferiormente*** *si existe* $N \in \mathbb{R}$ *de modo que* $N \leq a$ *para todo elemento* $a \in A$. *Se dice que* N *es una* ***cota inferior*** *de* A.

FIGURA 1. Cotas inferiores y superiores.

Ejemplo. 1. *Sea* $C = \{r \in \mathbb{R} \ : \ r > 0 \quad y \quad r^2 < 2\}$. *Es claro que* $N = 0$ *es una cota inferior de* C. *Además* $M = 4$ *es una cota superior de* C, *pero también lo es* 2. *Claro si* $s > 2$, *entonces* $s^2 > 2s > 4 > 2$, *y así* $s \notin C$.

Las cotas inferiores y superiores no tienen por que ser únicas, de hecho no lo son.

Definición. 2. **A:** *Dado un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ *(*$A \subset \mathbb{R}$*)* ***acotado superiormente*** *dedimos que* $\alpha \in \mathbb{R}$ *es el* ***supremo*** *de* A *(*$\alpha = \sup A$*) si se verifica que:*

- α *es cota superior de* A; *además*
- α *es la menor de las cotas superiores de* A, *es decir para todo* M *cota superior de* A *se tiene que* $\alpha \leq M$.

B: *Dado un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ *(*$A \subset \mathbb{R}$*)* ***acotado inferioremente*** *dedimos que* $\beta \in \mathbb{R}$ *es el* ***ínfimo*** *de* A *(*$\beta = \inf A$*) si se verifica que:*

- β *es cota inferior de* A; *además*
- β *es la mayor de las cotas inferiores de* A, *es decir para todo* N *cota inferior de* A *se tiene que* $N \leq \beta$.

La **La Propiedad del Extremo Superior de** $\mathbb{R}$ nos dice que todo subconjuto de números reales **no vacío** acotado superiormente tiene un supremo.

Definición. 3. *Se llama* ***máximo*** *de un conjunto a su supremo si pertenece al conjunto.*

Se llama ***mínimo*** *de un conjunto al ínfimo si pertenece al conjunto.*

Ejemplos. 2.

- *Sea* $B = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \quad : \quad n \in \mathbb{N}\}$. *Es claro que en* $\mathbb{Q}$, $\inf B = 0$ *y que* $\sup B = 1$. *En* $\mathbb{R}$ *ocurre lo mismo, pero se verá más claro un poco más adelante.*
- *El conjunto* C *anterior esta acotado superiormente como sabemos. Luego existe* $\sup C$. *Haciendo algunas cuentas se puede probar que* $\sup C = \sqrt{2}$.

Figura 2. Ínfimos y supremos.

En este último ejemplo vemos la diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Los números racionales **no** tienen la propiedad del extremo superior.

Proposición. 1. *Dado $n \in \mathbb{N}$ y para todo número real positivo $0 < r \in \mathbb{R}$, existe $\sqrt[n]{r}$.*

Demostración: Se define $C = \{s \in \mathbb{R} \quad : \quad s > 0 \text{ y } s^n < r\}$. Como en el caso $n = 2$, este conjunto esta acotado superiormente y por tanto tiene un supremo, en $\mathbb{R}$ (si solo contasemos con números racionales no tendría por que existir). Y con algunas cuentas se comprueba que $(\sup C)^n$ no puede ser ni mayor ni menor que r, luego solo queda la posibilidad de que $(\sup C)^n = r$, es decir que $\sup C = \sqrt[n]{r}$. $\square$

Proposición. 2. ***(Propiedad del extremo inferior)*** *Si B es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, entonces existe el ínfimo de B.*

Demostración: Sea N una cota inferior de B, es decir $N \leq b$ para todo $b \in B$. Se define el conjunto

$$-B = \{-b \quad : \quad b \in B\}.$$

Es fácil ver que $M = -N$ es una cota superior del conjunto $-B$. Por tanto existe su supremo, $\exists \sup -B$. Ahora es un simple ejercicio probar que $-\sup -B = \operatorname{ínf} B$ $\square$

Observación. 1. *Si $\alpha = \sup A$, entonces para todo $\epsilon > 0$ el número $\alpha - \epsilon$ no es supremo de A. Claro, de serlo α no sería la menor de las cotas superiores.*

Del mismo modo, si a un ínfimo le sumamos cualquier cantidad positiva deja de ser una cota inferior y por tanto un ínfimo.

Propiedades Geométricas de $\mathbb{R}$. Hemos visto anteriormente que los números los podíamos situar sobre una recta. De hecho $\mathbb{R}$ es una recta.

FIGURA 3. La recta real.

Tomemos un punto r sobre la recta y consideremos los puntos a la izquierda de él (los números menores que él). Esto constituye un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente por el propio r y cuyo supremo solo puede ser r. Es decir los números reales ocupan todos los punto de la recta sin dejar huecos, como pasaba con $\mathbb{Q}$.

Proposición. 3. *Todo número real está comprendido entre dos enteros consecutivos.*

Demostración: Lo que queremos probar es que para todo $r \in \mathbb{R}$ existe $m \in \mathbb{Z}$ de modo que $m \leq r < m+1$.

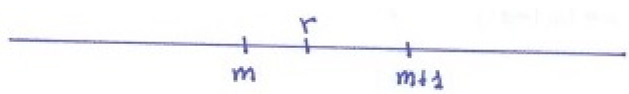

FIGURA 4. Los enteros en la recta real.

Primero veamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r < n$. Si esto no es cierto, existiría $\alpha = \sup \mathbb{N}$. Así $\alpha - 1$ no es supremo y existiría un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\alpha - 1 < n_0$ y por tanto $\alpha < n_0 + 1 \in \mathbb{N}$. Lo que nos lleva a contradicción.

Sea ahora $A = \{n \in \mathbb{Z} \quad : \quad r < n\}$. Por lo anterior A es no vacío y por la propiedad de la buena ordenación existe $\min A = m_0 \in \mathbb{Z}$. Ahora ya es fácil ver que:

$$m_0 - 1 \leq r < m_0$$

$\square$

Proposición. 4. *(**Propiedad Arquimediana**) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $y < nx$*

Demostración: Lo que queremos probar es que existe un natural n de modo que

$$nx = x + x + x_{n-\text{veces}} \cdots + x > y.$$

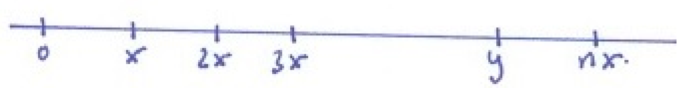

FIGURA 5. Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$.

Claro, sea $y/x \in \mathbb{R}$, por la Proposición anterior sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $y/x < n$, como x es positivo se deduce que $y < nx$ □

Ejemplo. 2. $\text{ínf}\{\frac{1}{n} \quad : \quad n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Demostración: El 0 es una cota inferior del conjunto. Sea $0 < N \in \mathbb{R}$. Así, $1/N$ es positivo y existe un natural n tal que $1/N < n$, luego $\frac{1}{n} < N$. Por tanto $N > 0$ no es cota inferior del conjunto; la mayor de ellas es precisamente 0 □

Proposición. 5. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ de modo que $x < q < y$*

Demostración: Lo que queremos probar es que siempre existe un racional entre dos números reales.

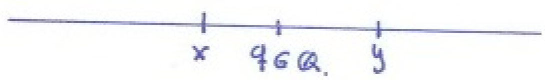

FIGURA 6. Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Sea $m \in \mathbb{Z}$ de modo que $m \leq x < m+1$. Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{n} < \text{mín}\{x-m, y-x\}$ (si $m = x$, solo consideramos $y - x$ y tomamos $q = m + \frac{1}{n}$). Por otro lado, existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{k-1}{n} \leq x - m < \frac{k}{n}$. Por tanto

$$x < m + \frac{k}{n} = q = m + \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y$$

□

Ejemplo. 3. *Sean $x \leq y$ dos números reales. Si para cualquier cantidad positiva $\epsilon > 0$, se tiene que $x \leq y \leq x + \epsilon$, entonces necesariamente $x = y$.*

Demostración: Dados dos números reales, $a, b \in \mathbb{R}$ puede ocurrir tres cosas: o bien $a < b$, o bien $b < a$ o que $a = b$. En nuestro caso como $x \leq y$, descartamos ya la posibilidad de $y < x$. Supongamos que $x < y$. Si miramos la figura anterior, entre x e y se abre un espacio (más adelante diremos que la distancia de x a y es $y - x > 0$). Sea $\epsilon_0 = \frac{y-x}{2} > 0$, entonces

$$x + \epsilon_0 = x + \frac{y-x}{2} = \frac{y+x}{2} < \frac{y+y}{2} = y.$$

Luego para este ϵ_0 concreto no se verifica nuestra hipótesis. Llegamos pués a contradicción. Nuestra suposición de que $x < y$ no es cierta. Luego ya solo es posible que $x = y$ □

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es