ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

La Distancia en $\mathbb{R}$.

Definición. 1. *Dado $x \in \mathbb{R}$ llamamos **valor absoluto** de x al número real positivo*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0; \\ -x, & si \quad x < 0. \end{cases}$$

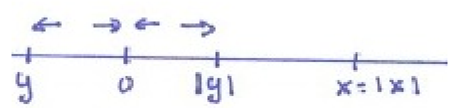

FIGURA 1. Valor absoluto.

El valor absoluto **mide** la **distancia** de un número real x al punto 0. También podemos ver el valor absoluto como una aplicación $|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya gráfica es:

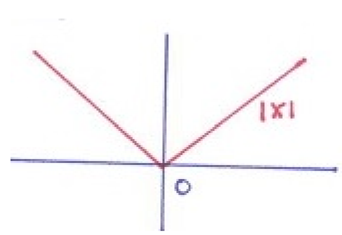

FIGURA 2. Función valor absoluto.

Proposición. 1. ***(Propiedades del valor absoluto.)*** *Para todo par de números reales $x, y \in \mathbb{R}$ se verifican estas tres propiedades:*

- $|x| \geq 0$; *además* $|x| = 0$ *si y solo si* $x = 0$.
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Propiedad **triangular**).*

Demostración: Las dos primeras propiedades son fáciles de probar y se dejan como ejercicio. Veamos la tercera. En primer lugar observemos que para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica que $a \leq |a|$. Así

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & |x| \\ y & \leq & |y| \end{array} \quad \text{y por tanto} \quad x + y \leq |x| + |y|.$$

Por otro lado

$$\begin{array}{rcl} -x & \leq & |-x| = |x| \\ -y & \leq & |-y| = |y| \end{array} \quad \text{y por tanto} \quad -x + (-y) = -(x+y) \leq |x| + |y|.$$

De lo que se deduce que $|x + y| \leq |x| + |y|$ $\square$

Definición. 2. *(**Distancia en** $\mathbb{R}$) Se define la distancia entre dos números reales $x, y \in \mathbb{R}$ por*

$$dist(x, y) = |x - y|.$$

El concepto de distancia es esencial para poder definir y entender el concepto de **límite** (y por tanto de función continua, derivable o integrable) que veremos más adelante.

Proposición. 2. *(**Propiedades de la distancia.**) Dados cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ números reales, se verifican estas tres propiedades:*

- $|x - y| \geq 0$; *además* $|x - y| = 0$ *si y solo si* $x = y$.
- $|x - y| = |y - x|$
- $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$ *(Propiedad **triangular**).*

Demostración: Las demostraciones se basan en las propiedades del valor absoluto. Las dos primeras son muy fáciles. Para convencernos de la tercera (la propiedad triangular) bastará el siguiente dibujo

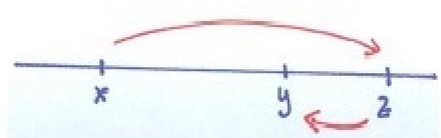

FIGURA 3. Propiedad triangular de la distancia.

que dice que "para ir de x a y siempre es más corto si no pasamos por z". $\square$

Ejemplo. 1. *Resolver la ecuación* $|x - 3| + |x - 7| = 4$.

Demostración: Si no estuviesen los valores absolutos, estaríamos ante una ecuación de primer grado fácil de resolver. Como no es el caso, veamos que hacer. Lo primero es llevar los puntos $3, 7$ y x sobre la recta real.

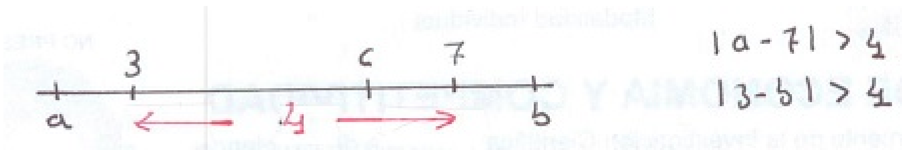

FIGURA 4. Posición relativa de puntos sobre la recta.

Una observación directa sobre el dibujo nos dice que los números a menores que 3 y los mayores de 7 no pueden ser solución de la ecuación. Tenemos que buscar entre los números c que estén entre 3 y 7, de modo que la suma de distancia de c a 3 y de c a 7 sea 4. En este caso es fácil ver que todo $x = c$ está en tales condiciones.

De forma general este tipo de problemas se puede hacer del siguiente modo sistemático. Del dibujo vemos que tenemos tres casos:

- si $x < 3$ y por tanto la ecuación queda $-x + 3 + (-x) + 7 = 4$, así $-2x = -6$ y así $x = 3$, lo cuál es incompatible con $x < 3$;
- si $3 \leq x < 7$ y por tanto la ecuación queda $x - 3 + (-x) + 7 = 4$, así $4 = 4$ lo cuál es cierto, por tanto para todo $x \geq 3$, y $x < 7$ se verifica la ecuación;
- si $x \geq 7$ la ecuación queda $x - 3 + x - 7 = 4$, de lo que se deduce que $2x = 14$ y así $x = 7$ es solución.

Luego las soluciones de esta ecuación son todos los $x \in [3, 7]$ $\square$

Intervalos. Los intervalos son los conjuntos más utilizados al trabajar sobre $\mathbb{R}$.

Definición. 3. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se llama* ***intervalo abierto*** *de extremos a y b al conjunto de la recta*

$$(a, b) = \{r \in \mathbb{R} \quad : \quad a < r < b\}.$$

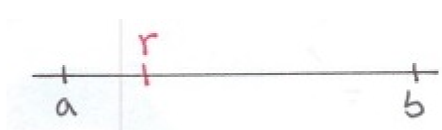

FIGURA 5. Intervalo abierto.

Ejemplos. 1.

- *Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, se considera el intervalo abierto*

$$(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon) = \{r \in \mathbb{R} \quad : \quad x_0-\epsilon < r < x_0+\epsilon\} = \{r \in \mathbb{R} \quad : \quad |r-x_0| < \epsilon\}.$$

Este es el conjunto de todos los reales que distan de x_0 menos que ϵ.

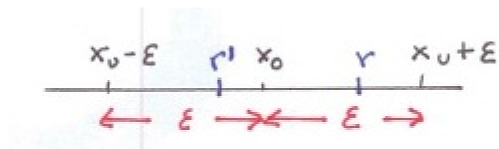

FIGURA 6. Intervalo de centro x_0 y radio ϵ.

- $(7-\frac{1}{2}, 7+\frac{1}{2})$ *son todos los números reales que distan de 7 menos que $\frac{1}{2}$.*

Definición. 4.

- *Intervalo cerrado:*

$$[a,b] = \{r \in \mathbb{R} \quad : \quad a \le r \le b\}.$$

- *Semirrecta cerrada:*

$$[a,\infty) = \{r \in \mathbb{R} \quad : \quad a \le r\}.$$

- *Semirrecta abierta:*

$$(-\infty,b) = \{r \in \mathbb{R} \quad : \quad r < b\}.$$

- $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$.

Ejemplo. 2. *Hay que determinar el conjunto*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad |2x+3| < 6\}.$$

Demostración: Para quitar el valor absoluto debemos distinguir dos casos:

- $2x+3 \ge 0$ (es decir $x \ge \frac{-3}{2}$), en este caso tenemos la desigualdad $2x+3 < 6$ y despejando $x < \frac{3}{2}$. Luego $x \in [\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$.
- En otro caso $x < \frac{-3}{2}$, y la desigualdad queda, $-2x-3 < 6$ y despejando la x, $x > \frac{9}{-2}$. Así $x \in (-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2})$

Luego

$$A = (-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}) \bigcup [\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}) = (-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}).$$

□

Ejemplo. 3. *Dados $a < b$ dos números reales, el número $\dfrac{a+b}{2}$ es el punto medio del segmento que une a con b.*

Demostración: La distancia que sepera a a y b es exactmente $b-a$. Buscamos un punto entre a y b que equidiste de ambos. Así $|a-\frac{a+b}{2}|=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}$. Por otro lado, $|\frac{a+b}{2}-b|=b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-b}{2}$. Luego efectivamnete $\frac{a+b}{2}$ equidista de a y b, luego es el punto medio buscado. $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es