ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

POLINOMIOS DE TAYLOR. DEFINICIÓN.

Vamos a considerar una función polinómica

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Observemos que

$$\begin{array}{rcl} P(0) & = & a_0 \\ P'(0) & = & a_1 \\ P''(0) & = & 2a_2 \\ \vdots & & \\ P^{k)}(0) & = & k!a_k \\ \vdots & & \\ P^{n)}(0) & = & n!a_n. \end{array}$$

Ahora despejando los coeficientes del polinomio, éste lo podemos escribir como

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{k)}(0)}{k!} x^k.$$

Si tenemos un polinomio P de grado n cuyas potencias están dadas sobre $(x-a)$, es decir

$$P(x) = a_n(x-a)^n + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + ... + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0,$$

de forma análoga a lo de arriba, podemos escribir

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Observación. 1. *Existe una relación entre los coeficientes de un polinomio y las derivadas sucesivas del mismo. ¿Algo parecido ocurre con otras funciones?*

De entrada damos la siguiente definición.

Definición. 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función al menos n-veces derivable en un punto $a \in Domf$. Se llama* ***polinomio de Taylor*** *de la función f de* *grado n y centrado en el punto a al polinomio*

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Ahora nos podemos preguntar que relación hay entre una función f y sus polinomios de Taylor (que varían según el grado n).

- Para $n = 1$, el polinomio de Taylor de grado 1 es

$$P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a); \text{verifica que } \begin{array}{rcl} P_{1,a}(a) & = & f(a) \\ P'_{1,a}(a) & = & f'(a) \end{array}$$

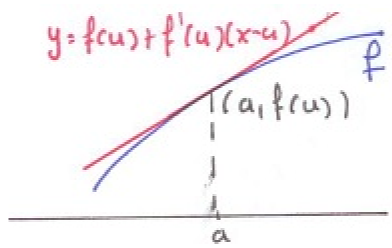

FIGURA 1. Polinomio de Taylor de grado uno.

- $n = 2$, el polinomio de Taylor de grado 2 es

$$P_{2,a}(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2; \text{verifica que } \begin{array}{rcl} P_{2,a}(a) & = & f(a) \\ P'_{2,a}(a) & = & f'(a) \\ P''_{2,a}(a) & = & f''(a) \end{array}$$

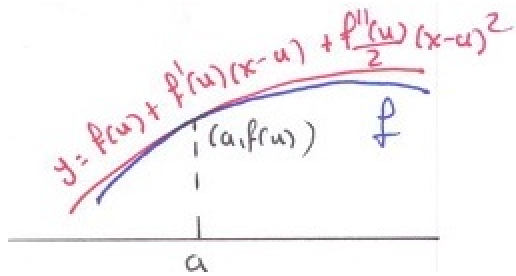

FIGURA 2. Polinomio de Taylor de grado dos.

El polinomio de grado uno $P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ no es más que la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(a, f(a))$. Como vimos, ésta era una aproximación de la función cerca del punto $a \in \mathrm{Dom} f$.

El polinomio de grado dos $P_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$, una parábola, parece una mejor aproximación de f cerca de a, ya que en este caso coinciden en el punto a hasta la segunda derivada. En general tenemos el siguiente resultado.

Teorema. 1. *Sea una función $f : (a-\epsilon, a+\epsilon) \to \mathbb{R}$ derivable n-veces en $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Demostración: Si al límite anterior le aplicamos n-veces la Regla de L'Hôpital llegamos a que

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{n)}(x) - P^{n)}_{n,a}(x)}{n!} = 0$$

□

Observación. 2. *Se puede probar que si $P(x)$ es un polinomio de grado n de modo que para todo $k \le n$ se verifica que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = 0,$$

entonces necesriamente $P(x) = P_{n,a}(x)$.

El resultado anterior nos permite hacer una prueba sobre máximos y mínimos relativos que dejamos pendiente desde el Tema de Derivadas.

Corollary 0.1. *Sea $a \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \subset Domf$ de modo que existen f' y f'' en $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ y $f'(a) = 0$.*

- **a:** *Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f*
- **b:** *Si $f''(a) < 0$, entonces a es un máximo local de f*

Demostración: b) Ejercicio.

a) Sabemos por el Teorema anterior que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Ahora

$$\frac{f(x) - P_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} - \frac{f''(a)}{2} \to_{x\to a} = 0$$

Luego se tiene que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = \frac{f''(a)}{2} > 0.$$

Como $(x-a)^2$ es positivo, necesariamente $f(x) - f(a) > 0$ en un entorno de a. Luego por definición de mínimo local, a lo es □

Vamos a poner algunos ejemplos de cálculo de polinomios de Taylor.

Ejemplo. 1. *Vamos a calcular los polinomios de Taylor de las siguientes funciones centrados en los puntos a que se indican.*

1. $f(x) = e^x$, *en* $a = 0$.
2. $f(x) = e^x$, *en* $a = 1$.
3. $f(x) = \cos x$, *en* $a = 0$.
4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, *en* $a = 0$.
5. $f(x) = \ln x$, *en* $a = 1$.

Demostración:

1. Para todo k se tiene que $(e^x)^{k)}_{|x=0} = e^0 = 1$, así
$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$
2. Como en el caso anterior, $(e^x)^{k)}_{|x=1} = e^1 = e$, así
$$P_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e(x-1)^k}{k!}.$$
3. Si $f(x) = \cos x$, se tiene que $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, y $f^4(x) = \cos x$; volvemos al principio. Así $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$ y $f'''(0) = 0$ y se vuelve a repetir esta secuencia. Por lo tanto
$$P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$
(ejercicio)
4. De forma muy parecida al caso del coseno, se ve el caso $f(x) = \operatorname{sen} x$,
$$P_{2n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
(ejercicio).
5. Para $f(x) = \ln x$, tenemos que $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{-2}{x^3}$, $f^4(x) = \frac{6}{x^4}$,...etc Viendo estas derivadas si suponemos que $f^{k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, derivando tenemos que
$$f^{k+1}(x) = \frac{-kx^{k-1}(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^{2k}} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$
Luego por inducción hemos probado que
$$f^{k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \quad \text{y por tanto} \quad f^{k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$
Ahora el polinomio de Taylor buscado es
$$P_{n,1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.$$

□

¿Para que nos pueden servir estos polinomios de Taylor? Los polinomios son fáciles de evaluar, solo aparecen sumas y productos. Hay funciones más difíciles de evaluar, pero se puede aproximar por su polinomio de Taylor.

Ejemplo. 2. *Queremos evaluar* $f(x) = \sqrt{1+x}$ *cerca de cero.*

Demostración: Para $x = 0,1$ tenemos $f(0,1) = \sqrt{1,1}$. ¿Quién se acuerda de como se hace una raíz cuadrada? Podemos hacer otra cosa.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \sqrt{1+x} & \text{y por tanto} & f(0) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} & \text{y por tanto} & f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)}\frac{1}{\sqrt{1+x}} & \text{y por tanto} & f''(0) = \frac{-1}{4}. \end{array}$$

El polinomio de Taylor de orden dos es por tanto

$$P_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

Ahora el polinomio de Taylor aproxima la función

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \simeq \sqrt{1+x} \quad \text{si} \quad x \simeq 0.$$

Así

$$1 + \frac{1,1}{2} - \frac{(1,1)^2}{8} \simeq \sqrt{1,1}$$

□

Quizas en este caso es mejor recordar la regla del cálculo para raíces cuadradas. ¿Y si queremos calcular $\operatorname{sen} 1$ o $\ln 2$?

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es