

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL TEOREMA DE TAYLOR.

Al tomar el valor del polinomio de Taylor $P_{n,a}(x)$ en lugar del valor de la función $f(x)$ cometemos un error. En lo que sigue vamos a determinar tal error.

Definición. 1. Sea f una función para la que existe su polinomio de Taylor de grado n centrado en a , $P_{n,a}(x)$. Se define el **resto** de orden n en a como

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x).$$

Observación. 1. El error que se comete al tomar $P_{n,a}(x)$ en lugar de $f(x)$ es precisamente

$$|R_{n,a}(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|.$$

El Teorema siguiente lo que nos da es una caracterización de este error.

Teorema. 1. (de Taylor). Sea $f : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ una función $n + 1$ -veces derivable en el intervalo $[a, x]$, entonces:

a:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \text{para algún } t \in (a, x),$$

ésta es la llamada **fórmula del resto de Lagrange**;

b: si además $f^{(n+1)}$ es integrable en $[a, x]$,

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt,$$

ésta es la llamada **fórmula integral del resto**;

Un resultado análogo se puede probar en el intervalo $[x, a]$.

Demostración: Consideramos las funciones:

$$s(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

y

$$g(t) = (x-t)^{n+1}.$$

Estas funciones son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x) , en particular

$$s'(t) = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{k+1}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^k(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1}$$

poniendo $j = k - 1$

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=0}^n \frac{f^{k+1}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{j+1}(t)}{j!} (x-t)^j \\ & = - \frac{f^{n+1}(t)}{n!} (x-t)^n. \end{aligned}$$

Y

$$g'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

Además $s(x) = g(x) = 0$ y $s(a) = R_{n,a}(x)$ y $g(a) = (x-a)^{n+1}$.

a) Si aplicamos a s y g el Teorema del Valor Medio de Cauchy, existe $t \in (a, x)$ de modo que

$$\frac{s(x) - s(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{s'(t)}{g'(t)} = \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}$$

y despejando $s(a)$

$$s(a) = R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

b) Esta parte es una simple aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo

$$s(x) - s(a) = \int_a^x s'(t) dt$$

y sustituyendo

$$-s(a) = -R_{n,a}(x) = - \int_a^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

□

Observación. 2. $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$. Si

$$R_{n,a}(x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

entonces

$$P_{n,a}(x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(x).$$

Lo cuál nos daría una mejor aproximación de $f(x)$ al aumentar el grado del polinomio de Taylor.

Ejemplo. 1. Vamos a evaluar el error máximo que cometemos al tomar $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ en lugar de $\sqrt{1+x}$ para $x \in [-0,2, 0,2]$.

Demostración: El error que cometemos es

$$|\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8})| = |f(x) - P_{2,0}(x)| = |R_{n,0}(x)|$$

aplicando la fórmula integral del resto

$$= | \int_0^x \frac{f'''(t)}{2} (x-t)^2 dt |$$

como $(\sqrt{1+x})''' = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$

$$\leq \int_0^x \left| \frac{3}{8} \frac{(1+x)^{-\frac{5}{2}}}{2} \right| |(x-t)|^2 dt$$

como $0,8 \leq 1+x$ y $|x-t| < 0,2$ para todo $x \in [-0,2, 0,2]$

$$\leq 0,2 \times \frac{3}{16} \frac{1}{(0,8)^{\frac{5}{2}}} (0,2)^2 = \frac{2^3}{10^3} \frac{3}{2^4} \frac{10^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{15}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{1}{2^{\frac{17}{2}}} \leq \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}.$$

Luego al tomar $P_{2,0}(x)$ en lugar de $\sqrt{1+x}$ cometemos un error menor que 4 milésimas ($\frac{1}{256} < \frac{4}{1000}$) siempre que $x \in [-0,2, 0,2]$ \square

Ejemplo. 2. *Vamos a explicar la siguiente desigualdad*

$$|\text{sen}(a+h) - (\text{sen } a + h \cos a)| \leq \frac{1}{2} h^2.$$

Demostración: Consideramos $f(x) = \text{sen } x$ y $a \in \mathbb{R}$. Tenmos que

$$P_{1,a}(x) = \text{sen } a + \cos a(x-a).$$

Así

$$|\text{sen}(a+h) - (\text{sen } a + h \cos a)| = |f(a+h) - P_{1,a}(a+h)| = |R_{1,a}(a+h)|$$

tomando la fórmula integral del resto

$$= | \int_a^{a+h} \frac{\text{sen}''(t)}{1} (a+h-t) dt | \leq \int_a^{a+h} \left| \frac{\text{sen}''(t)}{1} \right| |(a+h-t)| dt$$

como la derivada segunda del seno es otro seno y ésta es una función acotada

$$\leq \int_a^{a+h} |(a+h-t)| dt = -\frac{|(a+h-t)|^2}{2} \Big|_a^{a+h} = \frac{h^2}{2}$$

\square

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

E-mail address: Cesar.Ruiz@mat.ucm.es