ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

SERIES. INTRODUCCIÓN.

¿Se pueden sumar infinitos números? Es decir, si tomamos una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ¿podremos sumar todos sus términos?

Ejemplos. 1.

- *Sea la sucesión de todos los naturales* $(n)_{n=1}^{\infty}$*. La suma de los* N *primeros números como sabemos es*

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Si tomamos límites para N *creciendo a infinito, entonces*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n = \sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)}{2} = \infty.$$

- *Hacemos lo mismo para la sucesión* $(r^n)_{n=1}^{\infty}$*, para* $r \in (0,1)$*.*

$$\sum_{n=1}^{N} r^n = \frac{r - r^{N+1}}{1-r}.$$

Tomando límites en N

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{N\to\infty} \frac{r - r^{N+1}}{1-r} = \frac{r}{1-r}.$$

En este caso obtenemos un valor finito y podemos decir que hemos ***sumado*** *los términos de la sucesión.*

Visto este proceso, que llamaremos **series** y notaremos por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, no es más que un tipo particular de sucesiones de las cuáles nos interesará claro el problema de covergencia. La importancia de este concepto la veremos cuando veamos que ciertas funciones pueden representarse en forma de serie.

A continuación haremos uns disgresión filosófica-histórica, para ver como las series resuelven una antigua paradoja.

Ejemplo. 1. ***Zenón de Elea*** *(s. VI a.c.) recogido en la "Física" de Aristóteles. "El segundo (argumento acerca del movimiento) es el llamado "Aquiles"* *(el más rápido de los gerreros griegos) y ello es que lo más lento (la tortuga) jamás será alcanzado en la carrera por lo más rápido, pués es forzoso que el perseguidor llegue primero al punto del que partió el perseguido, de suerte que es forzoso que el más lento lleve siempre una ventaja." ("De Tales a Demócrito, Fragmentos Presocráticos," Ed. Alianza Editorial, 2006).*

Zenón utiliza esta paradoja para negar la posibilidad del movimiento, en lo que coincidía con su paisano Parménides. Las series, sin embargo nos convencen de que la paradoja no es tal, dado que un proceso infinito puede tener límite finito.

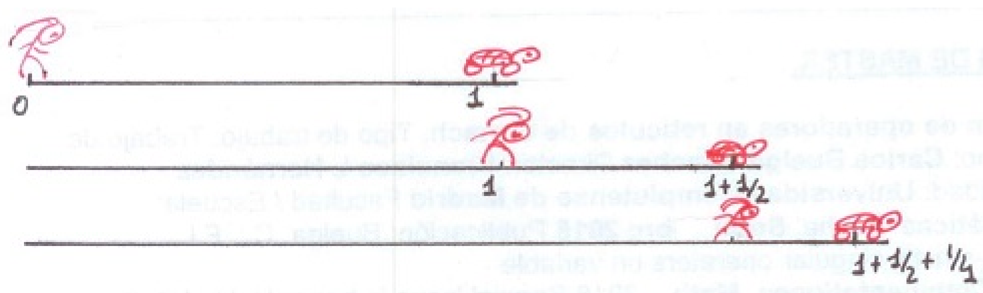

FIGURA 1. Aquiles persiguiendo a la tortuga.

Si suponemos que la tortuga es la mitad de rápida que Aquiles, es decir que en el tiempo en él que Aquiles recorre una distancia a la tortuga solo recorre la mitad, $\dfrac{a}{2}$, y que al principio les separa una distancia igual a 1, entonces cuando Aquiles llegue a 1 la tortuga estará en $1+\frac{1}{2}$. Cuando Aquiles llegue a $1+\frac{1}{2}$ la tortuga estará ya en $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ .....etc Tomado límites:

- movиento de Aquiles $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$
- moviento de la tortuga $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=1+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2$,

donde para calcular estas sumas hemos usado el Ejemplo anterior. Aquiles alcanza a la tortuga en el punto 2.

Si pensamos en tiempos ocurre lo mismo. Aquiles necesita T tiempo para llega a 1. Necesita $\frac{T}{2}$ para llegar a $1+\frac{1}{2}$ desde 1, ...etc Luego la suma de tiempos para alcanzar a la tortuga es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T}{2^n}=T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2T.$$

No hay paradoja pués el proceso infinito, que parece que nunca termina, tiene límite finito. ¡Que es lo que observamos en la realidad!

Una curiosidad, L. Tolstoi (s. XIX) en le capítulo XI de su inmensa novela "Guerra y Paz" hace una comparación sobre como las matemáticas, la suma de series que resuelven una paradoja clásica, con lo que tendría que ser una Teoría Científica de la Historia que pudiese explicar de forma lógica lo sucedido en el pasado.

En el libro "De Tales a Demócrito, Fragmentos Presocráticos," Ed. Alianza Editorial, 2006, también pueden encontrarse estas citas del atomista Demócrito (s. V a.c.):

- "Los niños a los que se les tolera que no se esfuercen ni aprendan las letras, ni la música, ni el ejercicio corporal, ni aquello que más relacionado se halla con la virtud: el respeto. Pués es de estas cosas de las que suele surgir en mayor grado el respeto."
- "Ni el arte ni la sabiduría son alcanzables si uno no ha aprendido."
- "El esfuerzo incesante se torna más llevadero por la costumbre."

¿Los clásicos erraban o son modernos?

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es