ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DEFINICIÓN DE SERIE CONVERGENTE.

Una serie es un tipo especial de sucesión. Importante por que permite dar forma a ciertas funciones (incluso obtenidas con datos experimentales). La definición formal es la que sigue.

Definición. 1. **a:** *Dada una sucesión de números reales* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$*, se llama suma parcial* s_N *de los términos de la serie a la suma:*

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \quad \textit{para} \quad N \in \mathbb{N}.$$

Se llama ***sucesión de sumas parciales*** *a la sucesión* $(S_N)_{N=1}^{\infty}$*. LLamamos* ***serie*** *de una sucesión de números reales* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$*, a la expresión* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, que es otra forma de notar la sucesión de sumas parciales.*

b: *Se dice que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* ***convergente*** *si existe el límite de las sumas parciales, es decir*

$$\textit{existe} \qquad \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

donde la última igualdad es una notación.

c: *Se dice que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* ***divergente*** *si el límite de las sumas parciales no existe o no es finito.*

Ejemplos. 1.

- *Sea la sucesión de todos los naturales* $(n)_{n=1}^{\infty}$*. La suma de los* N *primeros números como sabemos es*

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Si tomamos límites para N *creciendo a infinito, entonces*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n = \sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)}{2} = \infty.$$

- *Hacemos lo mismo para la sucesión* $(r^n)_{n=1}^{\infty}$, *para* $r \in (0,1)$.

$$\sum_{n=1}^{N} r^n = \frac{r - r^{N+1}}{1-r},$$

donde la igualdad la vimos en ejercicios de Inducción. Tomando límites en N

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{N\to\infty} \frac{r - r^{N+1}}{1-r} = \frac{r}{1-r}.$$

En este caso obtenemos un valor finito y podemos decir que hemos ***sumado*** *los términos de la sucesión.*

En el primer caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$ decimos que la serie diverge. En el segundo caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$ decimos que la serie converge.

Ejemplos importantes de series son los siguientes.

Definición. 2.

- *Dado un número real* $r \in \mathbb{R}$, *a la sucesión* $(r^n)_{n=n_0}^{\infty}$ *se llama sucesión geométrica.*
- *A la serie* $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$ *se le llama* ***serie geométrica***.

Definición. 3.

- *A la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *se le llama* ***serie armónica***.
- *A la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *se le llama serie armónica alternada.*

Una condición necesaria (¡que no suficiente!) para que una serie converja es la siguiente.

Proposición. 1. *Si una serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración: Es claro que $a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n$ para todo $N > 1$. Luego tomando límites

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$$

□

Ejemplos. 2.

- *La Proposición anterior nos dice claramente que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} n$ *y* $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$, *para* $|r| \geq 1$ *son divergentes (sus términos no tienden a cero).*

- *La serie* $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$, *para* $|r| \in (0,1)$, *es convergente. Veamos el caso* $r > 0$. *Claro,*
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=n_0}^{N} r^n = \lim_{N\to\infty} \frac{r^{n_0} - r^{N+1}}{1-r} = \frac{r^{n_0}}{1-r},$$
donde la igualdad la vimos en ejercicios de Inducción.
- *La sucesión armónica* $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ *converge a cero, como sabemos. Sin embargo la serie armónica* ***no*** *es convergente. Para ver esto tomamos* $N = 2^m$ *y así*
$$s_N = s_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \to_{m\to\infty} = \infty,$$
donde la desigualdad la vimos en ejercicios sobre inducción.
- *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{n})^n$ *no puede ser convergente. Claro*
$$(\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n > 1, \quad \textit{para todo} \quad n.$$
Luego los términos de la sucesión no convegen a cero, y por tanto la serie no puede ser convergente.

Observación. 1. *En general sumar una serie, calcular a lo que converge una serie convergente es un problema difícil. El caso de la serie geométrica es un caso muy especial.*

El problema de determinar si una serie es convergente o no es más fácil. Esencialmente esto se decide comparando con otras series que sepamos que son convergentes o no. De aquí la importancia de conocer series de los dos tipos, como las series geométricas y la serie armónica.

Propiedades de la series.

Veamos primero la relación de las series con las operaciones.

Proposición. 2. *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series convergentes, y sea* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces*

a: *La serie suma* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *es convergente y*
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

b: *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *es convergente y*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demostración: Es una aplicación al caso de series del resultado general para sucesiones. Veamos **b).**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda a_n = \lim_{N\to\infty} \lambda \sum_{n=1}^{N} a_n = \lambda \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

□

Ejemplo. 1. *Vamos a sumar la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n-2^n}{16^n}$.

Demostración: Haciendo unas sencillas transformaciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 2^n}{16^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{16^n} - \frac{2^n}{16^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{8})^n - (\frac{1}{8})^n.$$

Como las series geométricas $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{8})^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{8})^n$ son convergentes, entonces por el resultado anterior

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 2^n}{16^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{8})^n - \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{8})^n = \frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{3}{8}} - \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}$$

□

Una serie de términos positivos (o negativos) nos da una sucesión de sumas parciales monótona. Luego es fácil dar un criterio de convergencia.

Proposición. 3. *Sea una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de términos positivos, así* $a_n \geq 0$ *para todo* n*. Entonces la serie es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada (e.d. si existe* $M > 0$ *de modo que* $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq M$ *para todo* N*).*

Demostración: Si los términos a_n son mayores o iguales que cero, entonces la sucesión de sumas parciales $(s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n)_{N=1}^{\infty}$ es claramente una sucesión monótona creciente. Luego existirá el límite de la sucesión monótona (y por tanto de la serie) si la sucesión está acotada superiormente (como vimos en el resultado correspondiente en el Tema de Sucesiones) □

Veamos a continuación como comparando series podemos determinar el carácter de las mismas.

Proposición. 4. *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de términos positivos de modo que* $a_n \leq b_n$ *para todo* n*. Entonces*

a: *si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es convergente también lo es la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*;*
b: *si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente también lo es la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Demostración: Veamos la parte **a),** la segunda queda como ejercicio. Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie de términos positivos y convergente, la Proposición anterior nos dice que sus sumas parciales están acotadas. También lo estarán las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, por ser más pequeñas. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es también convergente $\square$

Ejemplo. 2. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, *con* $0 \leq p \leq 1$, *es divergente.*

Demostración: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, es claramente de términos positivos. Además como $p \in [0,1]$ se tiene que $n^p \leq n$ para todo n. Luego $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n^p}$ para todo n. Como la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, también lo es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\square$

El siguiente resultado lo probaremos de forma muy simple cuando hayamos estudiado integrales.

Proposición. 5. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, *con* $p > 1$, *es convergente.*

Ejercicio. 1. *¿Es convergente la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n}$*?*

Demostración: Los términos de la serie $\dfrac{n}{n^3+n}$ son del orden $\dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$. Esto nos da pie a la siguiente acotación

$$\frac{n}{n^3+n} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Según la Proposición anterior la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente. Por tanto nuestra serie también lo es $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`