ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

TÉCNICAS ESPECÍFICAS DE SUMAS DE SERIES.

Sabemos que la serie geométrica se puede sumar

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=n_0}^{N} r^n = \lim_{N\to\infty} \frac{r^{n_0} - r^{N+1}}{1-r} = \frac{r^{n_0}}{1-r}, \quad \text{si} \quad |r| < 1.$$

Otro ejemplo de series que se suman es el siguiente.

Ejemplo. 1. *(**Serie telescópica**). Existe un modo de sumar* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Demostración: Veámoslo. En primer lugar hacemos la siguiente suposición

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \qquad (*)$$

Haciendo cuantas encontramos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1}.$$

Usando lo anterior, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Ahora tomando límites.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$$

□

Observación. 1. *La igualdad* $(*)$ *anterior es un caso especial del método de **Descomposición en Fracciones Simples.***

El cuál dice que si tenemos una fracción de polinomios de la forma $\dfrac{Q(x)}{p_1(x)\dots p_m(x)}$ donde Q es un polinomio, p_i son un polinomios irreducibles de grado uno o dos, para todo $i = 1, 2, \dots, m$, distintos dos a dos; y el grado de Q es menor que el grado de $p_1(x)\dots p_m(x)$, entonces

$$\frac{Q(x)}{p_1(x)\dots p_m(x)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i(x)}{p_i(x)},$$

donde $A_i(x)$ son polinomio de grado cero, es decir una constante, o de grado 1 según sea el grado del correspondiente p_i sea uno o dos respectivamente.

Volveremos a usar esta técnica en más ocasiones, en particular en el Tema de Integración.

Ejemplo. 2. *Sea* $\dfrac{x^2+2}{(x-1)(x^2+1)}$, *escribimos*

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

tiene que ocurrir que

$$x^2+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C.$$

Por tanto

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & B & & & = & 1 \\ & & -B & + & C & = & 0 \\ A & & & & -C & = & 2. \end{array}$$

Resolviendo el sistema concluimos que

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

En los ejemplos anteriores, en cada caso se usa una técnica distinta para calcular la suma de la serie. No existe un método común para ello. De hecho solo se pueden sumar series muy particulares. En general para una serie solo disponemos de herramientas para decir si es convergente o no, pero no para alcanzar su suma.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es